

## Capítulo 9

### Inducción electromagnética

#### Primera Parte: La Ley de Faraday-Lenz-Maxwell

9.1 <u>Introducción</u>	9-2
9.2 <u>Ley de Faraday-Lenz: Regla del Flujo</u>	9-3
9.3 <u>Un generador primitivo de corriente alterna</u>	9-8
9.4 <u>Generadores de corriente alterna sinusoidal</u>	9-11
9.5 <u>Intentando explicar microscópicamente la generación de las corrientes inducidas</u>	9-15
9.6 <u>Principio de funcionamiento de los frenos magnéticos</u>	9-15
9.7 <u>La fuerza electromotriz</u>	9-17
9.8 <u>Dispositivos generadores de fem donde no parece haber variación del flujo</u>	9-19
9.9 <u>Corrientes parásitas o corrientes de Foucault o corrientes de torbellino o "eddy currents"</u>	9-20
9.10 <u>¿Usamos Regla del Flujo o la "Fuerza Magnética" para determinar la fem inducida?</u>	9-21
9.11 <u>Una nueva visión de la fem y una nueva interpretación de la Ley de Faraday-Lenz</u>	9-24
9.12 <u>Un ejemplo: espira que se mueve en un campo magnético variable en el tiempo y en el espacio</u>	9-25
9.13 <u>El campo eléctrico inducido (no conservativo)</u>	9-30

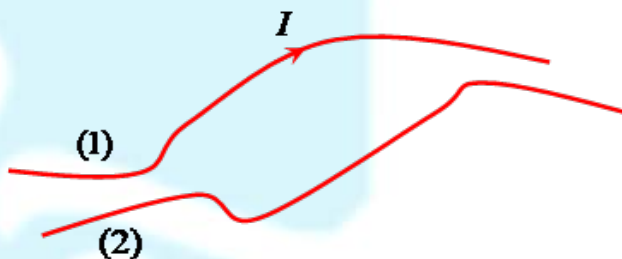
#### Segunda Parte :La Ley de Faraday aplicada a los circuitos con corrientes dependientes del tiempo

9.14. <u>Autoinductancia y fem inducida</u>	9-35
9.15. <u>Autoinductancia e Inductancia Mutua (un desarrollo más formal)</u>	9-37
9.16. <u>Cálculo de autoinductancias e inductancias mutuas</u>	9-38
9.17. <u>Los bornes homólogos</u>	9-44
9.18. <u>Combinando Inductancias</u>	9-45

## Primera Parte: Ley de Faraday-Lenz-Maxwell

### 9.1. Introducción

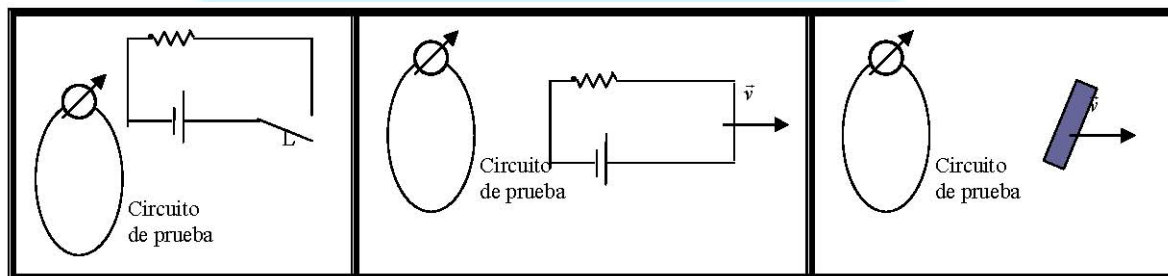
En el siglo XIX, después de haber comprobado que una corriente eléctrica  $I$  originaba un campo magnético  $\vec{B}$  (Ley de Ampere), los científicos se preguntaron si los campos magnéticos eran capaces de producir una corriente  $I$ . El conductor (1) de la figura crea un campo magnético porque por él circula una corriente. ¿Puede el campo magnético generado por la corriente  $I$  del conductor (1) “arrastrar” los electrones del cable (2)? ¿Puede producir una corriente en el cable (2)? ¿Y los campos magnéticos generados por imanes podrían “arrastrar” los



electrones de un conductor? Pero sabemos que las corrientes son generadas por campos eléctricos  $\vec{E}$ . Entonces, la pregunta es: ¿Puede un campo magnético  $\vec{B}$  generar un campo eléctrico  $\vec{E}$ ?

Después de muchísimas experiencias frustradas realizadas por muchos científicos, en 1831 M. Faraday descubrió que aparecían “efectos eléctricos” cuando “algo” estaba variando. Sus observaciones llevaron a que eso podía ocurrir si la  $I$  del conductor (1) era dependiente del tiempo, i.e. si  $I=I(t)$  se creaba o “inducía” una corriente  $I'$  en el cable (2). Pero eso ocurría también en otras circunstancias. Tomemos un circuito de prueba que consta de una espira conductora y un amperímetro. Se observa que:

- si se cierra o abre la llave  $L$  del circuito de la figura (batería con resistencia) se genera una corriente en la espira o circuito de prueba porque se mide una corriente en el amperímetro (se llama **corriente inducida**).
- si con la llave  $L$  cerrada del circuito, el circuito de prueba se traslada (se acerca o aleja), se mide una corriente (inducida) en el amperímetro.
- Si un imán se traslada se detecta en el amperímetro el paso de una corriente inducida.



Observemos que usamos un circuito de prueba, es decir, un conductor por lo que podemos medir una corriente bajo ciertas condiciones.

Unos años después de las experiencias de Faraday, James Clerk Maxwell generalizó la observación de Faraday, lo que dio lugar a la ley de Faraday-Maxwell, que es una de las cuatro ecuaciones fundamentales del Electromagnetismo. Pero antes de formalizar esta ley, estudiaremos algunas situaciones que nos ayudarán a entender, no solamente su formulación, sino también algunos fenómenos experimentales que la describen directa o indirectamente.

## 9.2. Ley de Faraday-Lenz: Regla del flujo

Vamos a interpretar los resultados de las experiencias que hemos presentado. En todas ellas algo cambia, algo varía. Analicemos cada una de ellas:

- 1) En el caso del conductor donde  $I=I(t)$ , va variando en el tiempo el campo magnético generado por ella (Ley de Ampere)
- 2) Cuando se cierra o abre la llave del circuito pila-resistencia comienza a circular o deja de circular corriente por él. En consecuencia, cambia el campo magnético en el tiempo.
- 3) Cuando se aleja o acerca el circuito pila-resistencia (con  $I$  constante), el campo magnético que él genera es constante pero el campo magnético en el lugar del circuito de prueba va cambiando a medida que el circuito pila-resistencia se traslada.
- 4) Cuando el imán se traslada, el efecto es análogo al de la situación presentada en 3).

En todas estas circunstancias, por un motivo o por otro, varía el campo magnético “en el circuito de prueba”.

Otras variaciones de estas experiencias son:

- a) Cambiar la forma del circuito de prueba y realizar las mismas experiencias.
- b) Cambiar la orientación del circuito de prueba y realizar las mismas experiencias.
- c) Dejar al imán o al circuito pila-resistencia inmóviles (con la llave cerrada), y girar la espira sin cambiar su forma.
- d) Varias más.....

Faraday resume estos comportamientos proponiendo: “**En el circuito de prueba aparece una corriente transitoria porque se produce en él una fuerza electromotriz inducida (*fem*)**”. Y esta *fem* es proporcional a la **variación del flujo de  $\vec{B}$  que concatena el circuito de prueba**. Es decir,

$$fem = k \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.1)$$

Donde el flujo se define (como ya lo hicimos en Electrostatica) como  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . Pero, **¡cuidado!**

En Electrostatica usamos el flujo del campo eléctrico o del vector desplazamiento a través de una

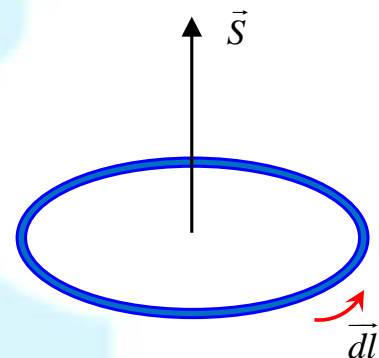
superficie cerrada. En Magnetostática (y Magnetismo en general) no podemos usar una superficie cerrada porque siempre daría cero<sup>1</sup>. Aquí la superficie debe ser abierta (pero, por supuesto, se necesita una curva cerrada para tener una superficie!)

Esta regla (porque explicaba todas las situaciones experimentales que Faraday había provocado) se llama **Regla del Flujo** y  $k$  es una constante a determinar. Y esta variación se puede producir por varios motivos

1. Varía el campo magnético
2. Varía la superficie en el tiempo.
3. Varía el ángulo entre el campo y la superficie
4. De alguna manera varían los límites de integración (ya veremos cómo)

Podemos encontrar situaciones muy complicadas difíciles de analizar cuantitativamente. Hay otras situaciones donde la regla del flujo no es válida<sup>1</sup>. Pero para comenzar, a comprender esta Regla es suficiente<sup>2</sup>. En las experiencias realizadas se observó que el sentido de circulación de la corriente dependía del crecimiento o decrecimiento del flujo. Es decir, si el flujo aumentaba a cierto ritmo se inducía una cierta corriente con un cierto sentido. Si, en cambio, el flujo disminuía al mismo ritmo, se inducía una corriente con el mismo valor pero de sentido contrario. H Lenz resumió lo observado alrededor de 1833: **La corriente inducida produce campos magnéticos que tienden a oponerse al cambio del flujo magnético que produce tales corrientes inducidas.** Es decir, la **Ley de Lenz** manifiesta que si el flujo del campo está aumentando (por algún motivo), el campo magnético inducido (producido por la corriente inducida) será tal que tienda a disminuir el flujo resultante.

Para redondear veamos un ejemplo donde solo varía en el tiempo el campo magnético. Supongamos que tenemos una espira conductora circular indeformable de radio  $R$  como la de la figura. Hemos definido el diferencial de curva  $\vec{dl}$  acorde al sentido arbitrario con que hemos definido la superficie  $\vec{S}$ . Esta espira está inmersa en una zona donde existe un campo magnético que puede variar en el tiempo pero no varía con la posición. La *fem* inducida, según la Ley de Faraday, en estas circunstancias, estará dada por

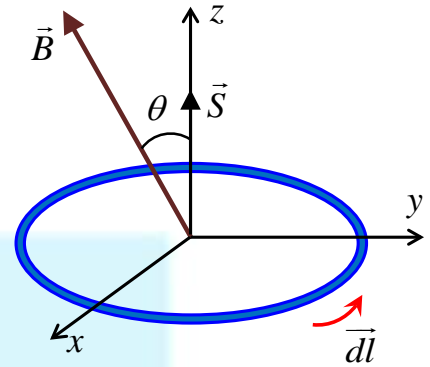


$$fem = k \frac{d\Phi}{dt} = k \frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = k \iint_{S(C)} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} \quad (9.2)$$

<sup>1</sup> Recordar que nunca se encontraron monopolos magnéticos, por lo que  $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  es una ley experimental

<sup>2</sup> Después veremos una generalización de la **Regla del Flujo** que llamaremos **Ley de Faraday-Maxwell**.

Supongamos que el campo externo  $\vec{B} = \vec{B}(t)$  forma un ángulo  $\theta$  con la superficie (como se indica en la figura). Sin pérdida de generalidad, podemos escribir  $\vec{dS} = dS \vec{e}_z$  y  $\vec{B}(t) = B_y(t) \vec{e}_y + B_z(t) \vec{e}_z$  por lo que



$$\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \frac{dB_y(t)}{dt} \vec{e}_y + \frac{dB_z(t)}{dt} \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{dS} = \frac{dB_z(t)}{dt} \vec{e}_z \cdot dS = \frac{dB_z(t)}{dt} dS \text{ y}$$

$$fem = k \iint_{S(C)} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{dS} = k \iint_{S(C)} \frac{dB_z(t)}{dt} dS = k \frac{dB_z(t)}{dt} \pi R^2 \quad (9.3)$$

¿Cuánto vale  $k$ ? ¿Es una constante positiva o negativa? ¿Depende de cómo sea  $\frac{dB_z(t)}{dt}$ ?

Supongamos que el campo crezca con el tiempo, i.e.  $\frac{dB_z(t)}{dt} > 0$ . Volvamos a la Ley de Lenz: la corriente inducida debe ser tal que el campo por ella generado se oponga al cambio. ¿Cuál sería su sentido en este caso? Como la componente del campo aumenta, el campo generado por la corriente debe *intentar* que no lo haga (que no aumente el flujo, que en este caso corresponde a que no aumente el campo). ¿Cómo? Creando un campo de sentido contrario, o sea, en el sentido  $-\vec{e}_z$ . Para ello, la corriente inducida debería circular en el sentido contrario a  $\vec{dl}$ . Es decir, en sentido contrario al que consideramos “positivo” al elegir el  $\vec{dS}$ . Es por este motivo que debe ser  $k < 0$ . Como todas las constantes de la Electricidad y Magnetismo, su valor depende del sistema de unidades elegido. Por suerte, en el SI, es muy sencillo: su valor es unitario y resulta  $k = -1$ .

Podemos escribir, entonces, la **Ley de Faraday-Lenz**

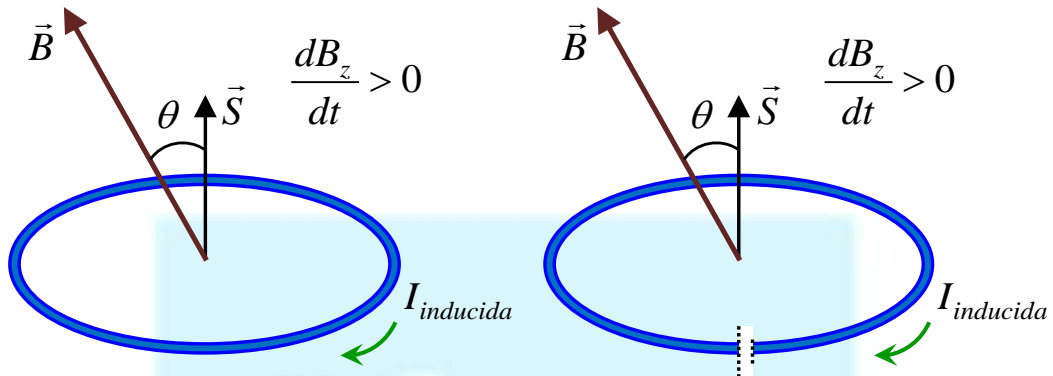
$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot \vec{dS} \quad (9.4)$$

Nosotros vamos a comenzar con la Ley de Faraday-Lenz<sup>3</sup> y postular que la *fem* es independiente del sistema inercial de referencia elegido y que la expresión (9.4) es válida en todos los sistemas inerciales de referencia.

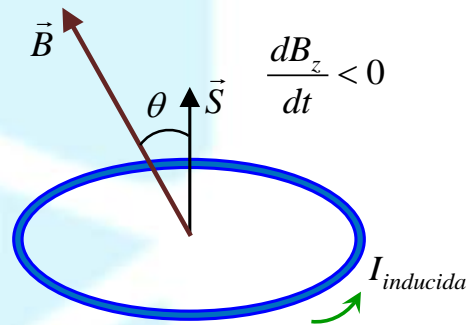
Podríamos representar el problema planteado con las siguientes figuras: se induce una corriente del sentido indicado y es **como si** hubiera una pila ubicada como se indica en la figura a la derecha:

<sup>3</sup> Decidimos partir de esta ley experimental porque así fue enunciada por Faraday. En algunos libros se parte de esta expresión y en otros el tema se desarrolla de otra manera. Por ahora no decimos cuál es esa otra manera.





- 1) ¿Qué hubiera ocurrido si  $\frac{dB_z(t)}{dt} < 0$ ? La corriente inducida será tal que el campo magnético inducido “trate” de que el flujo no disminuya. ¿Cómo? Creando una corriente inducida que produzca un campo en el sentido de  $+\vec{e}_z$ .



- 2) Como el sentido del  $\vec{dS}$  es arbitrario, podríamos haberlo elegido “hacia abajo”. La situación física es idéntica a la 1) por lo que la corriente inducida debe tener el mismo sentido que en 1). Hagamos la cuenta:

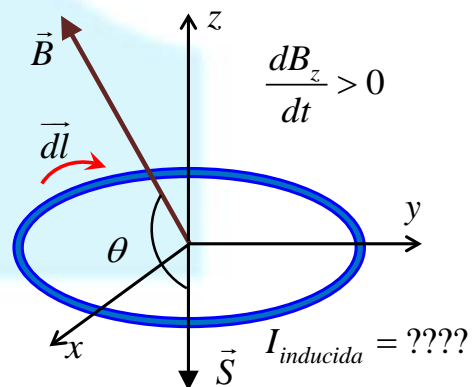
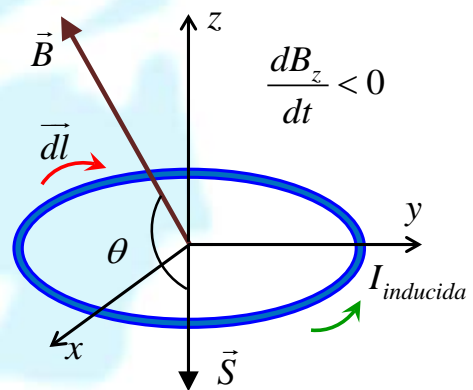
$$\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = \frac{dB_y(t)}{dt} \vec{e}_y + \frac{dB_z(t)}{dt} \vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S} = \frac{dB_z(t)}{dt} \vec{e}_z \cdot dS (-\vec{e}_z) = -\frac{dB_z(t)}{dt} dS \text{ y}$$

$$fem = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = +\frac{dB_z(t)}{dt} \pi R^2 < 0 \text{ porque } \frac{dB_z(t)}{dt} < 0. \text{ Que el resultado sea}$$

negativo significa que la corriente inducida tendrá sentido contrario al del  $\vec{dl}$ . Nos fijamos en el dibujo: esa corriente inducida creará un campo dentro de la espira “hacia arriba” que ayudará a que el flujo no disminuya **tanto**.

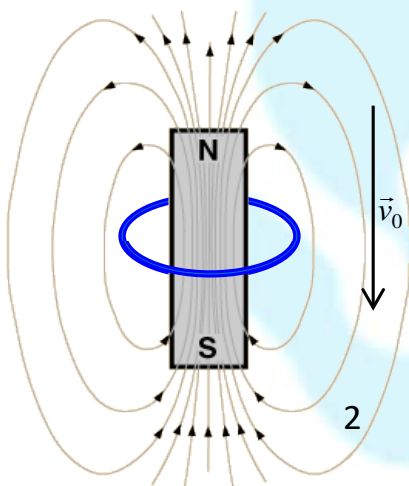
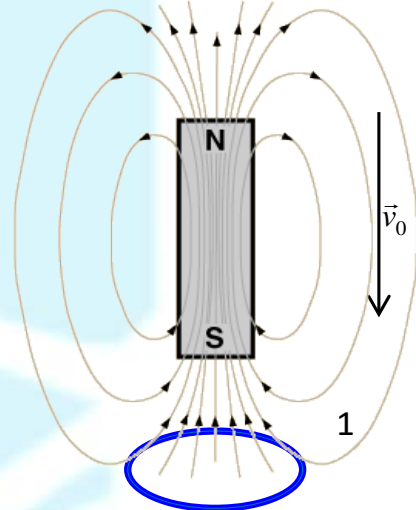
- 3) Nos quedaría esta situación que deben resolver ustedes con detalle.<sup>4</sup>



<sup>4</sup> Para estos casos tan sencillos seguramente que es innecesario hacer tantas cuentas. Pero más adelante nos encontraremos con situaciones que son más complicadas y no habrá otra posibilidad que hacer bien la cuenta o tener un poder de abstracción más que importante.

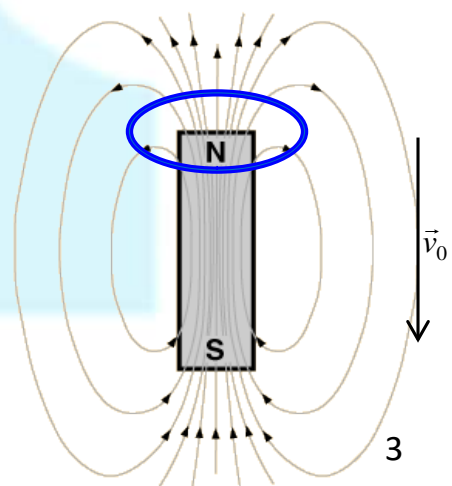
En lugar de dibujar un campo magnético, vamos a aplicar lo que vimos a una disposición experimental que podemos hacer en el Laboratorio (o en el aula). Vamos a ver qué ocurre cuando un imán rectangular se acerca y luego se aleja de una espira circular conductora. Supongamos que el imán cae a una velocidad  $\vec{v}_0$  (que no varía en el tiempo) pasando por el centro de la espira circular. Podemos distinguir tres instantes característicos.

1. Como vemos en la figura el campo magnético comienza a aumentar sobre la superficie determinada por la espira (aunque solo importa que aumente la componente perpendicular a la superficie de la espira). Por la Ley de Faraday-Lenz, se va a inducir una corriente que trata de que el flujo no aumente. Es decir, la corriente inducida tendrá sentido horario y nos acercamos a la situación 2.



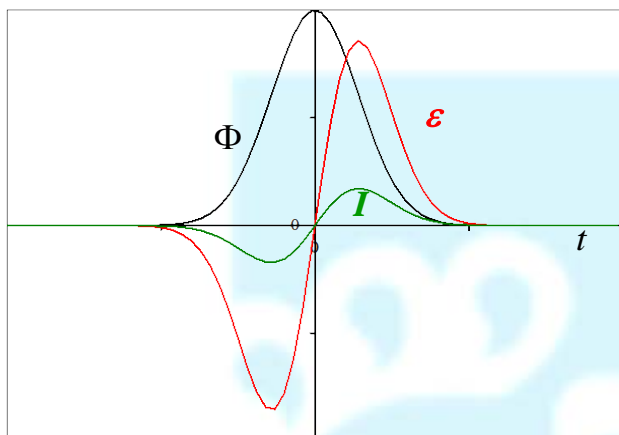
2. Una vez que el imán está dentro de la espira, el flujo va cambiando a una menor "velocidad" porque el campo magnético ya no varía tanto sobre la superficie de la espira. La corriente inducida con sentido horario va disminuyendo hasta que el flujo llega a un máximo (llamamos  $t=0$  cuando el centro del imán está justo en la superficie de la espira). Luego el flujo comienza a disminuir por lo que la corriente inducida intentará que no disminuya. ¿Cómo? Circulando en sentido antihorario y acercándonos a la situación 3

3. Cuando el imán va saliendo de la superficie de la espira, el flujo va disminuyendo por lo que la corriente inducida tendrá sentido antihorario (como adelantamos). Cuando el imán está muy alejado de la espira, ya no sentirá su efecto, i.e. no cambiará el flujo por lo que la corriente irá disminuyendo hasta anularse.



Podríamos hacer un gráfico **cualitativo** de esta experiencia donde graficamos el flujo, la fem y la corriente inducidas en función del tiempo. Este dispositivo es un **generador** de

corriente eléctrica. Y como esta corriente cambia de signo a través del tiempo (i.e. los portadores de carga tienen una velocidad media que va cambiando de sentido en el tiempo) se llama **Generador de Corriente Alterna** o simplemente **Generador de Alterna**.



Algunas observaciones:

1) En este generador por Inducción, el flujo varía en el tiempo porque el campo magnético lo hace.

2) Hemos tomado como positivo el sentido de circulación antihorario para todas las situaciones de este dispositivo.

3) Si estuviéramos en un sistema de coordenadas solidario al imán y con la espira moviéndose, la situación física sería la misma

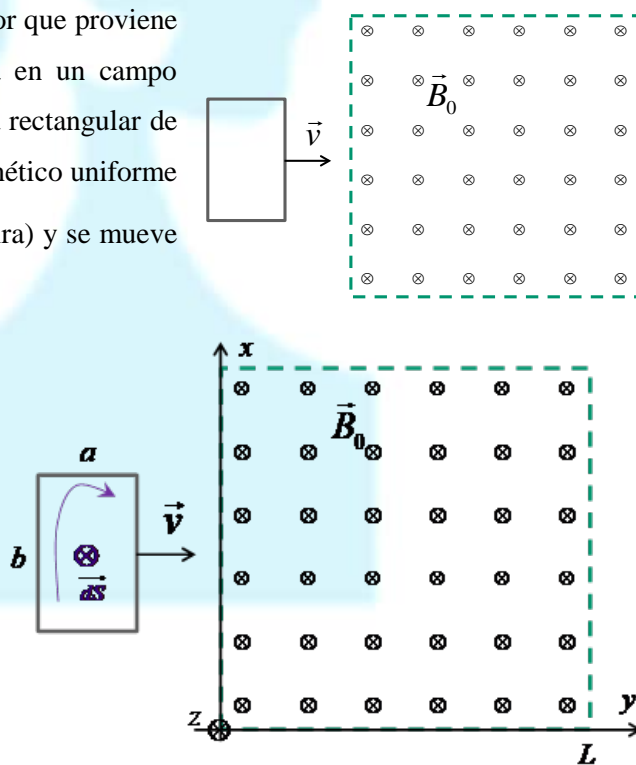
y el resultado sería el mismo. Así debe ser porque ambos son sistemas de referencia inerciales.

4) Podemos asociar a la espira con corriente inducida a un momento magnético inducido  $\vec{m}_{ind}$  (Ver **Capítulo 6**) perpendicular a la espira y cuyo valor es  $|\vec{m}_{ind}| = I_{ind} \pi R^2$ . Su sentido cambia en  $t = 0$ .

### 9.3. Un generador primitivo de corriente alterna

Veamos un tipo muy elemental de generador que proviene del movimiento de una espira conductora en un campo magnético constante y uniforme. La espira rectangular de lados  $a$  y  $b$  entra a una zona de campo magnético uniforme  $\vec{B}_0$  (perpendicular a la superficie de la espira) y se mueve

con velocidad constante paralela al plano de la espira como se indica en la figura. Para poder determinar cómo es la *fem* inducida  $\varepsilon$ , vamos a establecer un sistema de coordenadas (que nos permitirá hacer las “cuentas” correctamente) y comprobaremos que los resultados son cualitativamente compatibles con la Ley de Faraday-Lenz.





Tenemos, entonces,

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z; \vec{dS} = dS \vec{e}_z; \vec{v} = v_0 \vec{e}_y.$$

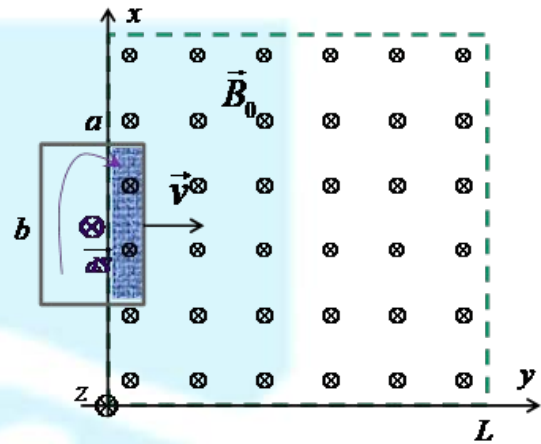
Supongamos que en  $t=0$  la espira está ubicada entre  $y_0$  (menor que cero) y  $y_0 - a$ ; y entre  $x_0$  y  $x_0 + b$ .

Mientras se mueva fuera de la zona donde existe el  $\vec{B}_0$  el flujo no cambia (es nulo) por lo que no hay *fem*.

Supongamos que la espira comienza a entrar en la zona de campo magnético en el instante

$$t_1 = -\frac{y_0}{v}.$$

En un instante  $t$ , la superficie “dentro” de la zona de campo corresponde a  $x_0 v_0 (t - t_1)$ . Calculemos la *fem*



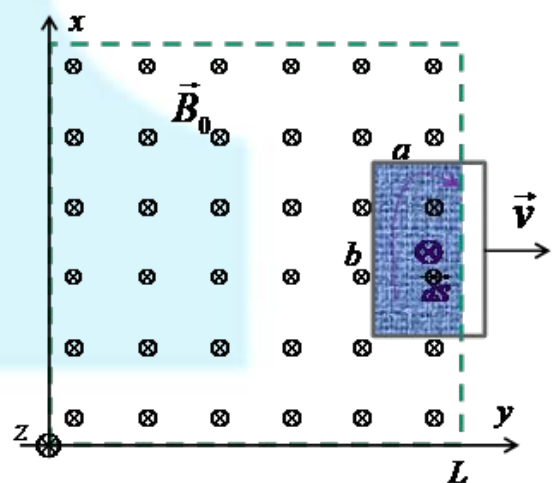
$$fem_{\text{entrar}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{espira donde es } B \neq 0} B_0 \vec{e}_z \cdot dx dy \vec{e}_z = -B_0 \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+b} dx \int_0^{v(t-t_1)} dy =$$

$$= -B_0 \frac{d}{dt} [b v (t - t_1)] = -B_0 b v < 0$$

Que resulte negativa significa que la corriente circulará en el sentido contrario al elegido como positivo. Observemos que el flujo va aumentando a medida que la espira entra en la zona de campo y la corriente inducida es tal que crea un campo en sentido contrario a  $\vec{B}_0$ , i.e. la corriente tendrá sentido antihorario. También es de notar que esta *fem* no varía en el tiempo mientras que la espira entra en la zona ya que  $\Phi = +B_0 a b$ .

Durante el tiempo que la espira está inmersa **totalmente** en el campo, el flujo no cambia. En consecuencia, durante ese intervalo de tiempo no hay *fem* inducida.

Cuando la espira comienza a salir de la zona (en el instante  $t_2 = t_1 + vL$ ), el flujo comienza a disminuir. Calcularemos la *fem* pero antes pensemos en qué sentido circulará la corriente inducida en este caso. Como el flujo comienza a



disminuir, la corriente inducida “tratará” de crear un campo del mismo sentido de  $\vec{B}_0$  para

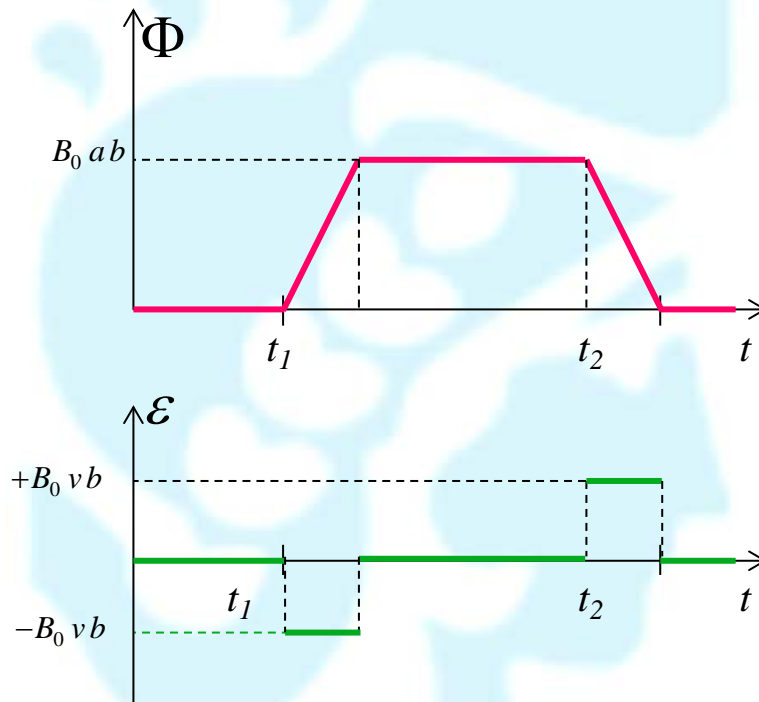
compensar la disminución del área con un aumento del campo magnético total (original más inducido). Esto solo es posible si la corriente circulara en sentido horario por lo que la *fem* debe resultar positiva. En efecto,

$$fem_{salir} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{espira donde es } B \neq 0} B_0 \vec{e}_z \cdot dx dy \vec{e}_z = -B_0 \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+b} dx \int_{a-v(t-t_1)}^L dy =$$

$$= -B_0 \frac{d}{dt} [b(L - a + v(t - t_1))] = +B_0 b v > 0$$

Una vez que la espira sale totalmente de la zona, el flujo no varía y la *fem inducida* resulta nula.

Grafiquemos el flujo del campo magnético y la *fem inducida* en función del tiempo.



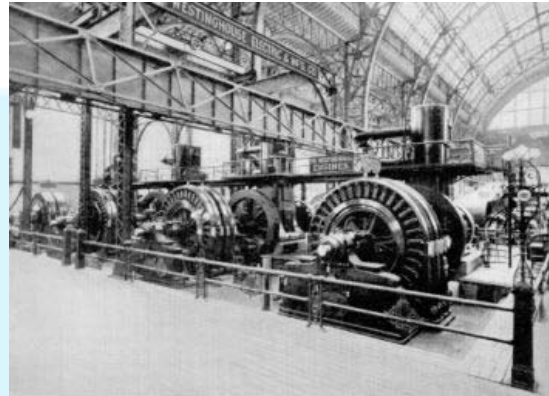
Una vez determinada la *fem*, podemos calcular la corriente que circularía por una espira rectangular en el caso en que fuera conductora y que su resistencia fuera  $R$ . La corriente resulta constante (de distinto signo) mientras la espira entra o sale de la zona de campo magnético (cambiando el sentido de circulación), siendo su valor  $I = \frac{B_0 vb}{R}$  y la potencia entregada en forma de calor está dada por

$P = \frac{(B_0 vb)^2}{R}$  durante cada intervalo donde la corriente no es nula. La corriente inducida será nula cuando la espira está totalmente “sumergida” en la zona de campo magnético o totalmente fuera de ella<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Vamos a volver sobre este dispositivo porque nos permitirá explicar el funcionamiento de los frenos magnéticos.

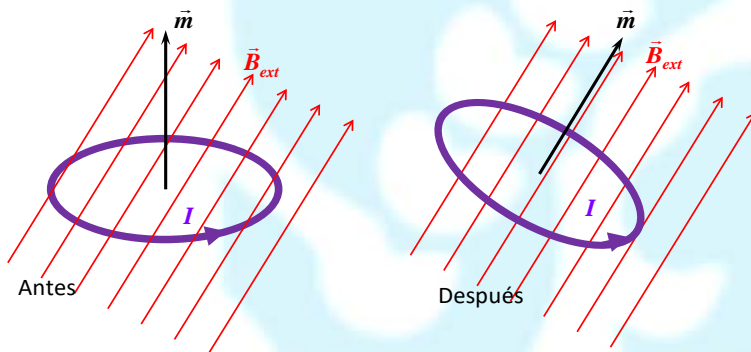
### 9.4. Generadores de corriente alterna sinusoidal

Vamos a ver un tipo muy especial de generador porque es el de mayor importancia para nuestra vida cotidiana. Si bien la tecnología es el producto del trabajo de muchos ingenieros y físicos, no podemos dejar de destacar el papel que tuvo Nicolás Tesla en la implementación de generadores de CA a gran escala. Es realmente muy interesante conocer la historia de este genio más que excéntrico<sup>ii, iii, iv</sup>.



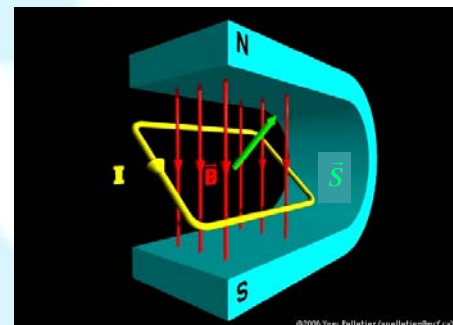
Generadores de CA de Tesla.

Habíamos visto en el **Capítulo 6** que si aplicábamos una corriente a una espira inmersa en un campo magnético  $\vec{B}_{ext}$ , ésta experimentaba un torque que hacía que su momento magnético  $\vec{m}$  se alineara con el campo externo. Este es el principio de funcionamiento de un motor: **la corriente eléctrica se transforma en mecánica**. El torque  $\vec{\mathcal{T}} = \vec{m} \times \vec{B}_{ext}$  resultaba proporcional a la corriente. Además,



aumentando el número de espiras, aumentaba ‘linealmente’ el torque, i.e. el trabajo mecánico podía incrementarse sin aumentar la corriente.

Veremos ahora que podremos hacer el camino inverso, es decir, convertir energía mecánica en energía eléctrica: obtener una corriente moviendo una espira o conjunto de espiras conductoras inmersas en un campo magnético  $\vec{B}_{ext}$ <sup>6</sup>. Como campo magnético externo puede usarse el generado por un imán permanente.

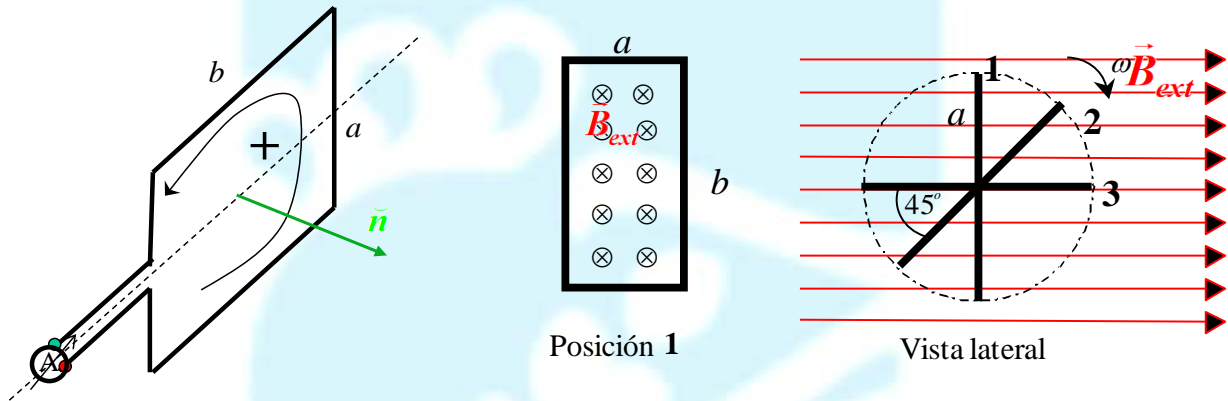


Vamos a analizar paso por paso cómo es la *fem* inducida (o la corriente inducida) en función del tiempo cuando la o las espiras se rotan alrededor de un eje de simetría de la espira con velocidad angular constante. Como vemos en la figura, al ir rotando la espira, variará el flujo del campo magnético y se generará una *fem*. Esa *fem* provocará la aparición de una corriente que generará un

<sup>6</sup> Podríamos hacerla girar gracias al agua que cae con fuerza en un embalse, por ejemplo.

campo magnético inducido (que se opondrá al cambio de flujo sufrido por la espira). Construiremos así un **generador** mucho menos primitivo que el anterior.

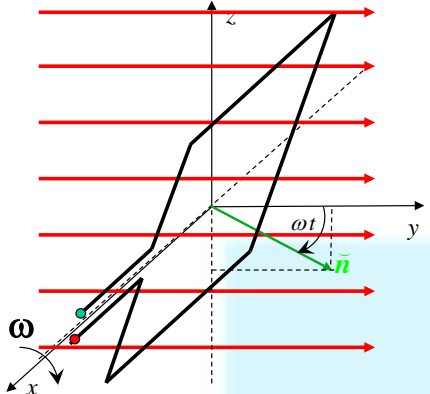
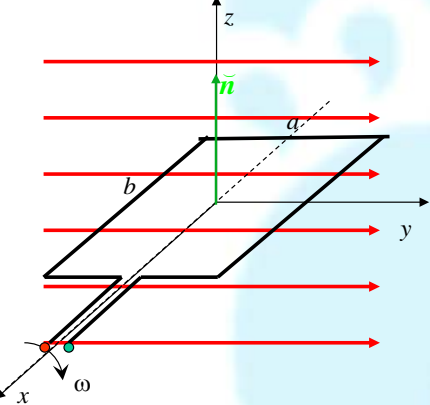
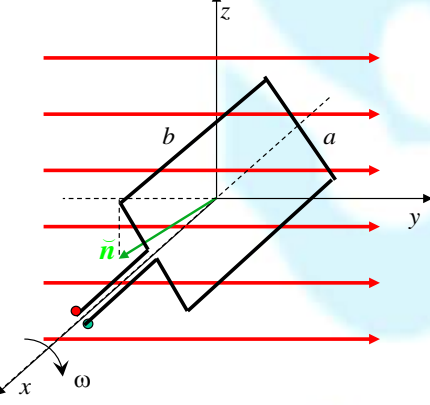
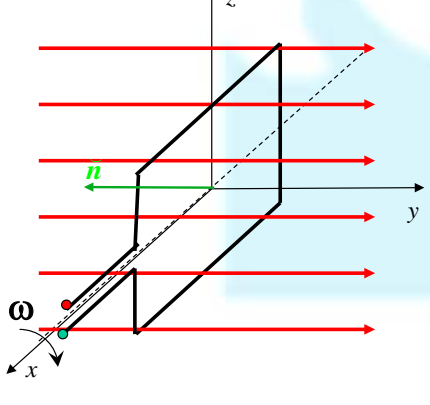
Vamos a elegir una sola espira conductora rectangular de lados  $a$  y  $b$  como la de la figura<sup>7</sup>. Establecemos arbitrariamente un sentido de circulación positivo, el que establece unívocamente cuál el sentido positivo de la normal a la superficie. Podemos también hacer una vista lateral del generador para visualizar mejor la geometría. En la posición **1** el campo magnético es perpendicular al área determinada por la espira y su sentido coincide con el de la normal a la superficie por cómo se definió la misma.



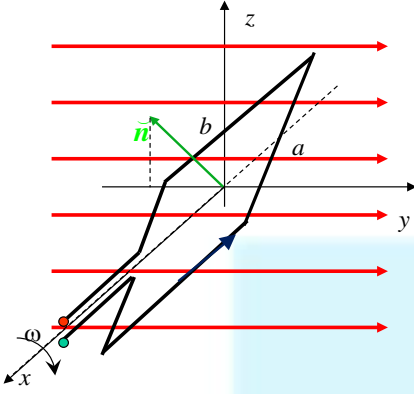
Analicemos ahora paso a paso. Tengamos en cuenta que al rotar la espira alrededor del eje  $x$  la normal a la superficie siempre estará contenida en el plano  $yz$  e irá girando alrededor del eje  $x$ .

	<p>En esta posición <math>\Phi = +B_0 ab</math></p> <p>Cuando comienza a girar, el flujo de <math>\vec{B}</math> (positivo)</p> $\Phi = \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{espira}} B \vec{e}_y \cdot d\vec{S}$ <p>comienza a disminuir. Mientras tanto se creará una <i>fem</i> tal que trate de aumentar el flujo para que no disminuya como calcularemos en <b>2</b></p>
--	--

<sup>7</sup> Fuera de la espira rectangular, el campo magnético puede ser nulo. Los cables paralelos marcados con dos puntos (rojo y celeste) están muy próximos y el área que determinan es despreciable. El circuito se cierra con, por ejemplo, un amperímetro.

 <p style="text-align: right;"><b>2</b></p>	<p>Como la superficie efectiva (su proyección sobre la dirección del campo) disminuye, debe aumentar el campo para tratar de que el flujo no disminuya. Entonces se “crea” una corriente en el sentido positivo de circulación.</p> $\Phi = \vec{B} \cdot S \vec{n} = B a b \cos \omega t$ $\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B a b \sin \omega t$ $fem = +\omega B a b \sin \omega t$
 <p style="text-align: right;"><b>3</b></p>	<p>En esta posición el flujo es nulo.</p>
 <p style="text-align: right;"><b>4</b></p>	<p>El flujo comienza a aumentar pero con signo negativo, es decir que, en realidad está disminuyendo. Se inducirá una I tal que trata de que el flujo siga siendo nulo, es decir se creará un campo con flujo positivo. Esto corresponde a que el campo sea de sentido contrario al original. Se logra con una corriente en el sentido que había sido definido positivo para la circulación</p>
 <p style="text-align: right;"><b>5</b></p>	<p>Llegamos a la posición en que <math>d\vec{S}</math> tiene sentido <math>-\vec{e}_y</math>. El flujo <math>\Phi = -B_0 a b</math>, es decir, tiene un mínimo.</p>



 <p><b>6</b></p>	<p>El flujo comienza a disminuir en módulo. El campo debe aumentar para que no deje de ser un mínimo. I.e. debe ser del mismo sentido que el campo original. Así, la corriente debe ser como en la figura (sentido negativo de circulación)</p>
<p><b>7, 8 y 9 quedan como ejercicio</b></p>	

Es muy fácil de comprobar que las expresiones

$$\Phi = \vec{B} \cdot S \vec{n} = B a b \cos \omega t$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\omega B a b \sin \omega t$$

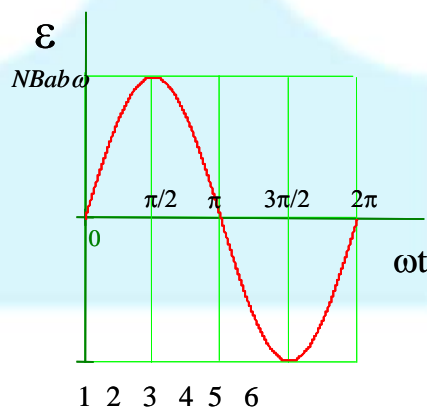
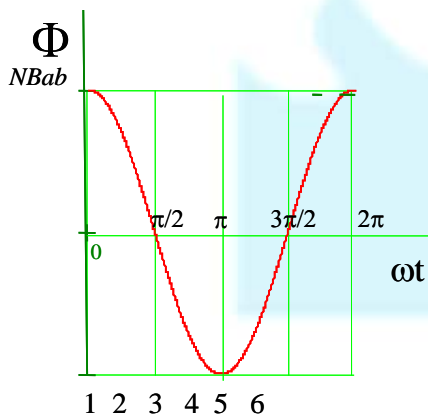
$$fem = +\omega B a b \sin \omega t$$

reflejan cada uno de los pasos. Si en lugar de una espira, fueran  $N$  espiras idénticas, el flujo total será  $N\Phi_{1 \text{ espira}}$  (por el principio de superposición). Si, además, el flujo no es máximo en el instante inicial, las expresiones del flujo y de la  $fem$  corresponden a

$$\Phi = N B a b \cos(\omega t + \varphi_0)$$

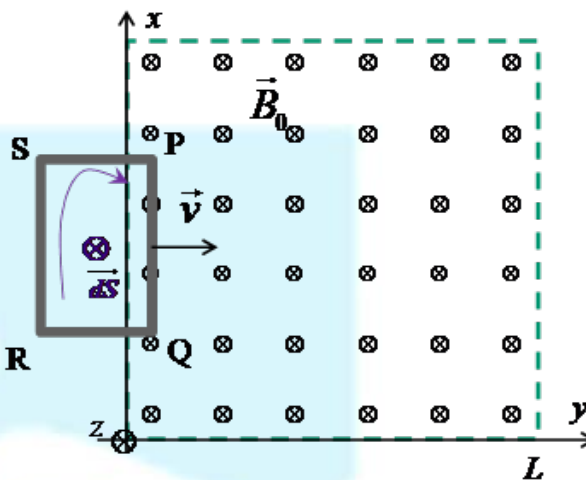
$$fem = +N \omega B a b \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Observar que ambas cantidades están desfasadas en  $\frac{\pi}{2}$ .



### 9.5. Intentando explicar microscópicamente la generación de las corrientes inducidas

Vimos en el *Capítulo 5* que las corrientes constantes se producían por acción de un campo eléctrico sobre los portadores de carga. Y el campo eléctrico era provisto por las baterías o pilas. ¿Cómo podemos explicar la aparición de las corrientes inducidas? Vamos a intentar explicarlo a partir del generador primitivo que estudiamos en 9.4. Al entrar en el campo magnético, los portadores de carga libres  $q$  (consideremos



que son las cargas positivas) que estén bajo la influencia de  $\vec{B}_0$  sentirán una fuerza dada por  $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}_0 = q v \vec{e}_y \times B_0 \vec{e}_z = q B_0 \vec{e}_x$  por lo que los portadores positivos irán de P hacia Q en el tramo PQ. (En el tramo SR no hay fuerza y en los tramos SP y RQ (dentro de la zona de campo) podrá haber una migración de cargas positivas hacia arriba). El déficit de cargas positivas en Q atrae portadores libres de RQ y así circulará una corriente en sentido antihorario (como habíamos obtenido a través de la Regla del Flujo). Cuando la espira está totalmente sumergida en la zona de campo magnético, también en el tramo SR habrá una migración de portadores positivos hacia R. Esto hará que cese la migración de portadores positivos de P a S y deja de circular corriente. Cuando la espira comienza a salir de la zona de campo, no habrá fuerza sobre los portadores del tramo PQ; solamente sobre los del tramo RS por lo que comenzará a circular una corriente en sentido horario.

Si bien este modelo es muy crudo, nos ayudará a entender la producción de corrientes parásitas, la generación de *fems* en dispositivos donde aparentemente no hay variación de flujo magnético a través de la superficie de la espira conductora y también el principio del **freno magnético**.

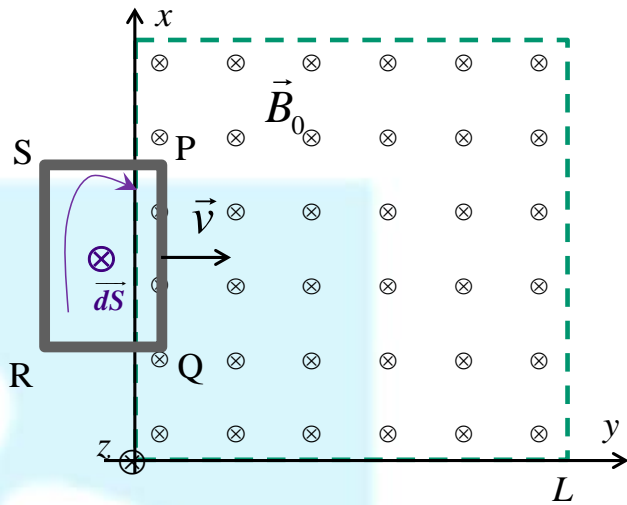
### 9.6. Principio de funcionamiento de los frenos magnéticos

En los dos generadores de corriente que estudiamos con cierto detalle, la velocidad lineal y la velocidad angular se consideraban constantes.

En el generador primitivo suponíamos que la espira se movía a través del campo con velocidad constante. ¿Es posible que lo haga en todo el trayecto? Hay varias maneras de atacar el problema. Por un lado hemos visto que al entrar en la zona de campo magnético (con cierta energía cinética) aparece una *fem* y, por lo tanto, si la espira es conductora comenzará a circular una corriente determinada por los valores de la *fem* y de la resistencia de la espira R. Por lo tanto habrá energía disipada en la resistencia. Esta energía en forma de calor, ¿de dónde proviene? De provenir de la energía cinética

original de la espira, ésta deberá disminuir su energía cinética... Es decir, se debería frenar. Veamos que es así.

Estudiamos la fuerza sobre la espira cuando comienza a circular corriente inducida. La fuerza sobre la espira aparece solamente en el tramo PQ ya que no existe campo en el tramo fuera de la región de campo, y en los lados paralelos al eje y se compensan las fuerzas.



Así

$$\vec{F} = \int_{x_0}^{x_0+b} I d\vec{l} \times \vec{B}_0 = \int_{x_0}^{x_0+b} \frac{B_0 v b}{R} dx \vec{e}_x \times B_0 \vec{e}_z = -\frac{B_0^2 v b^2}{R} \vec{e}_y$$

Vemos que tiene sentido contrario a la velocidad por lo que esta fuerza es de frenado. Por lo tanto, para mantener constante a la velocidad deberá aplicarse una fuerza

$$\vec{F}_{aplicada} = \frac{B_0^2 v b^2}{R} \vec{e}_y$$

La potencia (trabajo realizado/unidad de tiempo) necesaria para mantener esta velocidad será

$$P = \vec{F}_{aplicada} \cdot \vec{v} = \frac{B_0^2 v^2 b^2}{R}$$

Como puede verse, la potencia disipada en la resistencia

$$P_{disipada\ en R} = I^2 R = \frac{B_0^2 v^2 b^2}{R^2} R = \frac{B_0^2 v^2 b^2}{R}$$

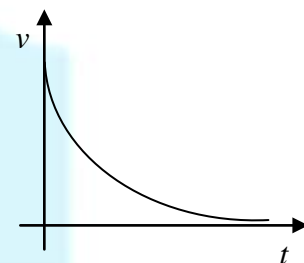
es igual a la potencia aplicada para mantener el movimiento con velocidad constante.

Podemos calcular cómo variaría la velocidad si no se aplicara esa fuerza a partir de la Ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{B_0^2 v b^2}{R} \vec{e}_y$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{B_0^2 b^2}{mR} dt \quad \rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B_0^2 b^2}{mR} t$$

$$v = v_0 e^{-\frac{B_0^2 b^2}{mR} t} \equiv v_0 e^{-t/\tau} \quad \tau = \frac{mR}{B_0^2 b^2} \text{ donde } \tau \text{ es el tiempo característico de frenado.}$$



Como vemos, cuanto mayor es la resistencia al paso de corriente, mayor es  $\tau$  y mayor el tiempo de frenado, tarda más en disminuir la velocidad. Podemos calcular qué distancia puede recorrer en el tiempo  $t$ :

$$\int_0^y dy = \int_0^t v_0 e^{-t/\tau} dt = v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) = v_0 \frac{mR}{B_0^2 b^2} (1 - e^{-t/\tau})$$

**Nota:** observar que si hubiéramos igualado la potencia disipada en la resistencia a la variación de energía cinética (con signo menos), también hubiéramos determinado la velocidad en función del tiempo.

En conclusión: este dispositivo (circuito móvil en campo magnético estático) sirve como fuente de *fem* si se mantiene la velocidad constante o como freno (usualmente el circuito es estático y el campo magnético, o lo que lo produce, se mueve). Hay una gran cantidad de dispositivos que usan frenos magnéticos: balanzas (¿dónde están?), reeles (esto es para pescadores), “montañas rusas”, trenes, etc.



### 9.7. La fuerza electromotriz<sup>8</sup>

Si pensamos en un circuito eléctrico típico (una pila con una lamparita) aparece una pregunta que nos puede dejar perplejos. La corriente es la misma a lo largo de todo el circuito en todo momento aunque la única “fuerza de empuje” está en la pila. ¿No sería esperable tener una corriente máxima en la pila y nada en la lamparita? ¿Quién empuja a los portadores de carga en el circuito? ¿Cómo es este empuje

<sup>8</sup> Esto está basado en el tratamiento dado en *Introduction to Electrodynamics* de Griffiths

que hace que la corriente sea la misma siempre en todos los puntos del circuito? Es más: como vimos en el Capítulo 5, los portadores de carga se mueven a paso de caracol. ¿Por qué no lleva media hora a que las noticias alcancen la lamparita? ¿Cómo saben los portadores que deben comenzar a moverse en el mismo instante?

**Respuesta:** Si la corriente no fuera la misma en todo el circuito, la carga se apilaría en algún lugar, y (acá está el punto crucial) el campo eléctrico que produciría esta carga acumulada trataría de nivelar el flujo de cargas. Supongamos (ver figura) que en la curva la corriente entrante es mayor que la

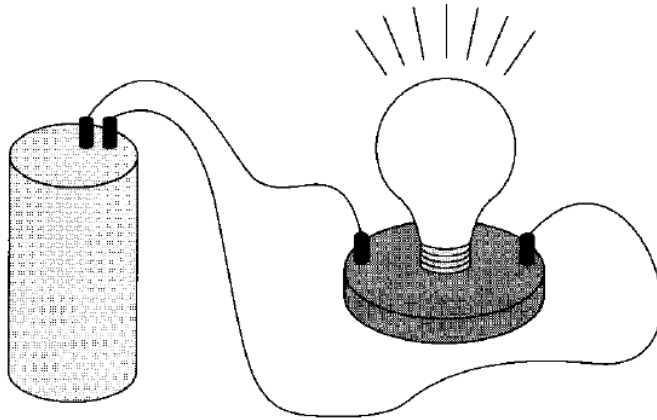


Figure 7.7

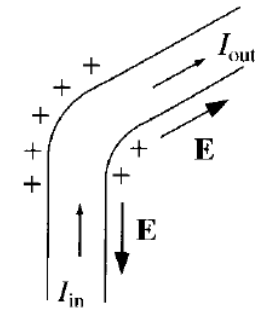


Figure 7.8

saliente. De ser así, se acumularía carga positiva y crearía un campo eléctrico saliente (de la curva). Este campo se opone al flujo de corriente entrante (y va a disminuir la corriente entrante) y va a incentivar a la corriente saliente, lo que hará que disminuya la cantidad de cargas positivas acumuladas en la curva. Cuando se acabe la acumulación, las corrientes (entrante y saliente) serán iguales: se llegará al equilibrio. Es un hermoso sistema que se autocorrije automáticamente para mantener la corriente uniforme. Y en la práctica lo hace tan rápido que podemos asumir que la corriente es la misma en todo el circuito (aún en sistemas que oscilan a radiofrecuencias).

El resultado de todo esto es que existen en realidad dos fuerzas asociadas a la corriente circulante: la *fuerza* (en nuestro caso es la pila) y la *fuerza electrostática* (que sirve para uniformizar el flujo de portadores y comunica la influencia de la pila a lugares distantes de la pila en el circuito). Escribamos la fuerza total por unidad de carga como

$$\vec{f} = \vec{f}_{fuente} + \vec{E}$$

Independientemente de cuál sea el mecanismo por el cual la fuente produce esa fuerza, el efecto neto será

$$fem = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{f}_{fuente} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_{fuente} \cdot d\vec{l}$$

porque la circulación del campo electrostático es nulo. Así, la *fem* puede ser interpretada como el trabajo realizado por unidad de carga por la fuente sobre el circuito. OJO!!! No es una fuerza...



Apliquemos esto a nuestro generador primitivo de la Sección 9.3. Como vimos, la *fem* producida al entrar en la zona de campo magnético era

$$fem_{\text{entrar}} = -B_0 v b$$

Y en la sección 9.5 vimos que la fuerza sobre cada portador positivo es  $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}_0 = q v \vec{e}_y \times B_0 \vec{e}_z = q B_0 \vec{e}_x$ . O sea, la fuerza por unidad de carga (la que produce que los portadores se muevan) es  $\vec{f}_m = B_0 v \vec{e}_x$ . Esta “fuerza” es ahora nuestra fuente. Probemos:

$$fem = \oint_C \vec{f}_{\text{fuente}} \cdot d\vec{l} = \oint_C B_0 v \vec{e}_x \cdot d\vec{l} = \int_Q^P B_0 v \vec{e}_x \cdot d\vec{l} = -B_0 v b$$

De todo el circuito rectangular, solo hay fuerza magnética en el segmento  $\overline{PQ}$  por lo que la circulación es nula excepto en ese tramo. E integramos desde  $Q$  a  $P$  porque habíamos definido como positivo el sentido de circulación horario. Llegamos al mismo resultado que habíamos obtenido a través de la Regla del Flujo. Si bien esto es tan solo un ejemplo, vamos a generalizar el resultado para casos como el del circuito que se mueve en una zona de campo magnético que no varía en el tiempo:

$$fem = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_{s(C)} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} \right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

### 9.8. Dispositivos generadores de fem donde no parece haber variación del flujo.

Comencemos por un tipo de generador que históricamente trajo muchos problemas en el siglo XIX porque no se podía entender su funcionamiento: el disco de Faraday o de Arago<sup>v</sup>. Esquemáticamente podemos representarlo por un disco metálico de radio  $a$  que rota a velocidad angular  $\omega$  alrededor

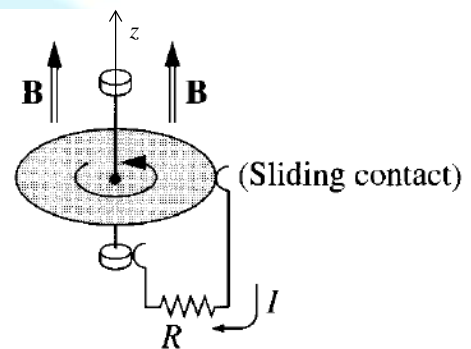
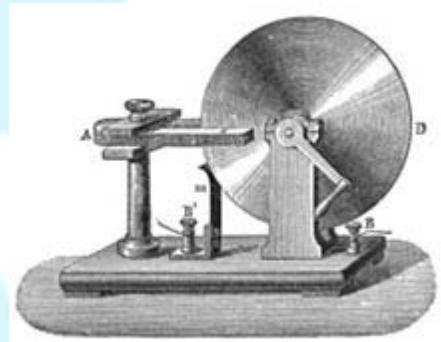
de un eje vertical en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  paralelo al eje de rotación. Se hace un circuito conectando un terminal de una resistencia al eje y el otro terminal al borde del disco (deslizante).

Calculemos la *fem* inducida a partir de:

$$fem = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot d\vec{l}$$

Esta integral se debe hacer pensando en los portadores

de carga que se mueven con una velocidad  $\vec{v} = \omega \rho \vec{e}_\phi$ , por lo que



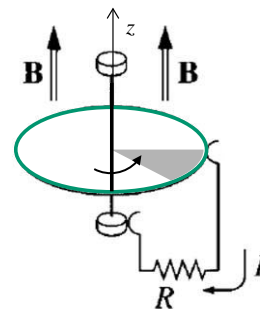
$\vec{v} \times \vec{B}_0 = \omega \rho \vec{e}_\phi \times B_0 \vec{e}_z = \omega \rho B_0 \vec{e}_\rho$ . Esto significa que los portadores positivos se dirigirán hacia al borde del disco (por eso el sentido de la corriente es el indicado en la figura). La integral será nula en todo punto fuera del disco<sup>9</sup>. En consecuencia,

$$fem = \oint_C \omega \rho B_0 \vec{e}_\rho \cdot d\vec{l} = \int_0^a \omega \rho B_0 d\rho = \frac{\omega B_0 a^2}{2} \quad \text{y la corriente}$$

$$I = \frac{fem}{R} = \frac{\omega B_0 a^2}{2R} \quad \text{si suponemos que la resistencia del disco es despreciable. Si no, la corriente}$$

también va a depender del material con el que esté hecho el disco.

¿En qué hubiera cambiado el cálculo si en lugar de un disco hubiéramos colocado un trozo del mismo (por ejemplo, uno en forma de sector circular) y el terminal hubiera estado adosado al borde exterior? El cálculo de la *fem* hubiera sido el mismo, el resultado de la *fem* hubiera sido el mismo... Lo diferente hubiera sido la corriente **si** no pudiéramos despreciar la resistencia del sector circular. ¿Será mayor o menor la corriente que en el caso de utilizar el disco completo? De lo que vimos en el Capítulo 5, la resistencia a la corriente que presenta un conductor cilíndrico es mayor cuanto menores son las posibilidades que tienen los portadores positivos de moverse. Está claro que las posibilidades de moverse son mayores en el disco completo, por lo que su resistencia sería menor si pensamos en este aspecto. En consecuencia, sería de esperar que la corriente fuera mayor cuando usemos el disco completo.

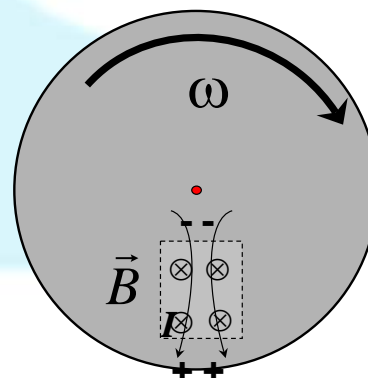


### 9.9. Corrientes parásitas o corrientes de Foucault o corrientes de torbellino o

#### “eddy currents”

El disco termina siendo como una pila sin pila (este es el primer generador “homopolar”). Fuera del disco, claramente la corriente circula por el conductor del circuito. Pero en el disco la corriente se desparrama por toda su superficie. Por eso se hace complejo pensar en la Regla del Flujo. ¿Cómo se distribuye la corriente en el disco? Calcular esto es una de las dificultades más grandes que existen. Pero es relativamente fácil de verlo en forma cualitativa. A estas corrientes se las denomina corrientes de Foucault o parásitas o de torbellino.

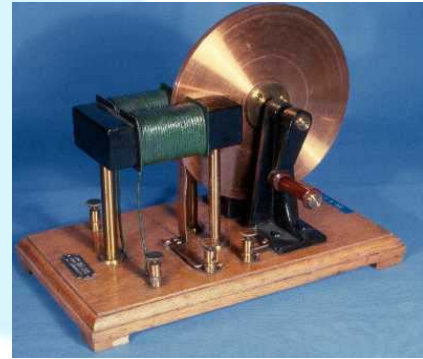
Ahondemos un poco más en el ejemplo de la sección anterior. Supongamos que el campo magnético solo “ocupa” una porción de la superficie y la velocidad angular se mantiene constante. Los



<sup>9</sup> No importa cómo sea la forma del circuito, el tramo sobre el disco lleva a una integral igual a la integral sobre un segmento de largo *a*

portadores de carga que van a sufrir el efecto de la fuerza magnética serán los que estén en esa porción. Y, según la disposición del esquema los portadores positivos se dirigirán “hacia abajo”. Por supuesto que los portadores positivos no siguen las direcciones indicadas con las flechas (piensen que en cada instante cambia la dirección radial para cada portador positivo). Pero, en promedio, podemos esquematizarlo como en la figura.

¿Qué ocurre si se gira el disco con la manija y luego se deja evolucionar al sistema? Pensando en nuestro generador primitivo, podemos determinar que se va a frenar. Es decir, también en este caso aparece una fuerza de frenado (de sentido contrario al del movimiento). Pero, en este caso, resulta imposible hacer el cálculo analítico.



Como vimos, el tiempo característico de frenado es  $\tau = \frac{mR}{B_0^2 b^2}$

para el generador primitivo. Para otros generadores más complicados, no podremos determinar este tiempo pero podemos pensar que será proporcional a la resistencia. Cuanto menor sea la resistencia, mayor será la fuerza de frenado y menor el tiempo que tardará en frenarse. Aplicando este resultado al disco de Foucault, llegaríamos a la conclusión que si no mantenemos la velocidad angular constante, el disco completo se frenará antes que el sector circular.

### ***9.10. ¿Usamos Regla del Flujo o la “Fuerza Magnética” para determinar la fem inducida?***

Esta pregunta esconde en realidad a otra: ¿son lo mismo la Regla del flujo y el trabajo que realiza la fuerza magnética sobre el circuito? En el ejemplo del generador primitivo, vimos que podríamos calcularlo de las dos maneras. En el caso del disco de Foucault, pudimos entender cómo se induce la *fem* a pesar de que no cambie el flujo (aunque sea así aparentemente; si no serían contradictorias ambas formas). Uno puede forzar a aplicar la Regla del Flujo (eso hacen la mayoría de los libros) al disco de Foucault y a otros dispositivos inventando circuitos (curvas) y superficies ficticias (que a algún científico se le ocurrió usar y nosotros repetimos su metodología). Sin embargo, aparte de estos casos forzados, la Regla del Flujo no resulta siempre válida<sup>10</sup>.

En conclusión, nosotros utilizaremos la Regla del Flujo o el trabajo de la Fuerza Magnética sobre el circuito para calcular la *fem* (según nos convenga más). De todas maneras, con lo que vimos hasta ahora podemos describir el funcionamiento de muchos dispositivos (como los generadores y los frenos magnéticos) y explicar otros muy pintorescos (como el “tubo mágico”, el anillo de Thompson y los “péndulos magnéticos”).

<sup>10</sup> Hay dos ejemplos en el libro de Feynman

Podemos deducir teóricamente que “las dos formas” de calcular la *fem* son solo eso: dos formas. Veamos cómo se puede demostrar esa afirmación. Cuando escribimos

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

dijimos en la Sección 9.2 que el flujo podía cambiar por varios motivos:

1. Varía el campo magnético  $\vec{B}$ : en el ejemplo de la espira circular de la Sección 9.2
2. Varía la superficie en el tiempo  $S = S(t)$ : podría ser una espira que se achica o agranda
3. Varía el ángulo entre el campo y la superficie  $\theta = \theta(t)$ : es el caso del generador de alterna
4. De alguna manera varían los límites de integración: es el caso de nuestro generador primitivo (se mueve la espira con  $\vec{v}$ )

¿Cómo se relaciona esto con la fuerza magnética  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ ?

Si el circuito  $C$  se mueve con velocidad  $\vec{v}$  en cierta dirección **sin deformarse**, en la derivada total de la expresión de la *fem* debemos tener en cuenta este movimiento<sup>viii</sup>. Así podemos reducir las causas del cambio del flujo a

1. El flujo en un punto cambia al transcurrir el tiempo
2. El circuito se traslada

En lo que sigue, solo nos limitaremos a hacer un esbozo de la demostración matemática (Este paso pueden pasarlo rápidamente, solo está para justificar la expresión final). Después le daremos sentido físico. La derivada total y la derivada parcial de un vector respecto al tiempo de una función vectorial  $\vec{G} = \vec{G}(\vec{r}, t) = \vec{G}(x, y, z, t)$  donde las variables  $x, y, z$  son también funciones del tiempo, están ligadas por la expresión

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{G}$$

donde llamamos  $\vec{v}$  al vector velocidad que está dado por  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ <sup>viii</sup>

Esta ecuación puede ser escrita de otra manera a partir de la identidad vectorial

$$\nabla \times (\vec{G} \times \vec{v}) = \vec{G}(\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{G}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{G} - (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{v}$$

El primer y cuarto término del segundo miembro son nulos porque consideramos que la **velocidad es uniforme** (no varía ni punto a punto en el espacio ni varía en el tiempo). En consecuencia

$$\nabla \times (\vec{G} \times \vec{v}) = -\vec{v}(\nabla \cdot \vec{G}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{G}$$

o

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{G} = \vec{v}(\nabla \cdot \vec{G}) + \nabla \times (\vec{G} \times \vec{v})$$

En consecuencia  $\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{G} = \frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + \vec{v}(\nabla\cdot\vec{G}) + \nabla\times(\vec{G}\times\vec{v})$

Para campos solenoidales ( $\nabla\cdot\vec{G} = 0$ ), resulta  $\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{\partial\vec{G}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{G}\times\vec{v})$

$$fem = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S(C)} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} - \iint_{S(C)} \nabla\times(\vec{B}\times\vec{v})\cdot d\vec{S}$$

Aplicando el teorema de Stokes al segundo término del miembro derecho y considerando que la superficie de integración  $S$  delimitada por la curva  $C$  no varía en el tiempo, se obtiene

$$fem = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S(C)} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

Así, esta ecuación es válida para “circuitos” rígidos que se mueven a bajas velocidades respecto de la velocidad de la luz de forma tal que las transformaciones de Galileo se puedan considerar válidas. Se interpreta, entonces, que el flujo magnético a través de un circuito  $C$  puede variar a causa de que el campo cambie en un punto al transcurrir el tiempo o porque el circuito se traslada con velocidad constante. Como puede verse, el segundo término del tercer miembro corresponde al trabajo de la fuerza magnética sobre el circuito por unidad de carga.

**Observación:** habíamos dicho en el Capítulo 6 que la fuerza magnética no realizaba trabajo. ¿No hay contradicción con lo que acabamos de decir sobre la  $fem$  inducida? La respuesta es NO. En el Capítulo 6, consideramos la fuerza magnética sobre una carga que tenía una velocidad inicial  $\vec{v}_0$  inmersa en un campo magnético externo  $\vec{B}_0$ . Y calculamos el trabajo realizado por dicha fuerza sobre la carga:

$$W = q \int_A^B (\vec{v}\times\vec{B}_0)\cdot d\vec{r} \text{ donde están relacionados } \vec{v} \text{ y } d\vec{r} \text{ por } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \text{ Por eso el trabajo realizado por}$$

la fuerza magnética cuando la carga se traslada es nulo (tanto entre dos puntos como en un camino cerrado). En cambio, al calcular la  $fem$  cuando el campo no varía en el tiempo,  $fem = \oint_C (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$ ,

$\vec{v}$  es la velocidad del circuito  $C$  y  $d\vec{l}$  indica sus características (su “forma”) y no está relacionado directamente con la velocidad.

**Moraleja:** No podemos adelantar de antemano si usar  $fem = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B}\cdot d\vec{S}$  o

$$fem = -\iint_{S(C)} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} \text{ para calcular la } fem. \text{ La primera es general y la segunda}$$

solamente es válida solo **cuando el circuito  $C$  no se deforma**. A veces, la primera parece presentar más dificultad.



### 9.11. Una nueva visión de la fem y una nueva interpretación de la Ley de Faraday-Lenz

¿Cómo podemos relacionar lo que vimos en la Sección 9.7 con la fem inducida? Habíamos visto que

$$fem = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{f}_{fuente} + \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_{fuente} \cdot d\vec{l}$$

donde la circulación del campo eléctrico era nula por tratarse de un campo electrostático. Así la fem podía ser interpretada como el trabajo realizado por unidad de carga por la fuente sobre el circuito. En los ejemplos que vimos hasta ahora, ¿cuál era la fuente? Vimos que era el flujo variable en el tiempo del campo magnético (por cualquiera de los mecanismos posibles). Podemos asociar  $\vec{f}_{fuente}$  a un campo eléctrico no conservativo. De esta manera, la fem representaría el trabajo que realiza el campo eléctrico total (conservativo y no conservativo) en un circuito completo por unidad de carga. Es decir,

$$fem = \oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{E}_{nc} + \vec{E}_c) \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_{Total} \cdot d\vec{l} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Y solamente contribuye el campo eléctrico no conservativo. La fem proviene de campos eléctricos no conservativos. Y si la fem es inducida, esa fem también debe provenir de un campo eléctrico no conservativo. Fue J.C. Maxwell quien dio esta otra interpretación a la Ley de Faraday-Lenz, haciendo un razonamiento matemático sencillo y físicamente sutil. Para Maxwell la Ley debía ser una propiedad de los campos y que no tenía nada que ver con la presencia o ausencia del circuito por el que circula la corriente. Es decir, Maxwell se liberó del circuito real. Maxwell postuló que la variación del flujo de  $\vec{B}$  en alguna zona del espacio (limitada o no) produce en todo punto del espacio (exista o no circuito de prueba) un campo eléctrico inducido por el cambio del flujo de  $\vec{B}$ . A esta se llama Ley de Faraday-Maxwell.

Y la fem  $\varepsilon$  sobre un circuito  $C$  se define como la circulación del campo eléctrico  $\vec{E}'$  a lo largo del circuito, observado desde un sistema de referencia solidario al circuito. Es decir, en un sistema donde  $\vec{v} = 0$ . En consecuencia,

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

donde hemos primado los campos para dejar en claro que están medidos desde un sistema inercial solidario al circuito. De esta manera, usando el Teorema de Stokes llegamos a la ecuación diferencial

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}$$

Pero como todos los observadores inerciales miden la misma fem (es un postulado) sobre un circuito, la Ley de Faraday-Lenz se cumple para todos los sistemas inerciales. Entonces

- Desde un sistema en reposo respecto del circuito

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

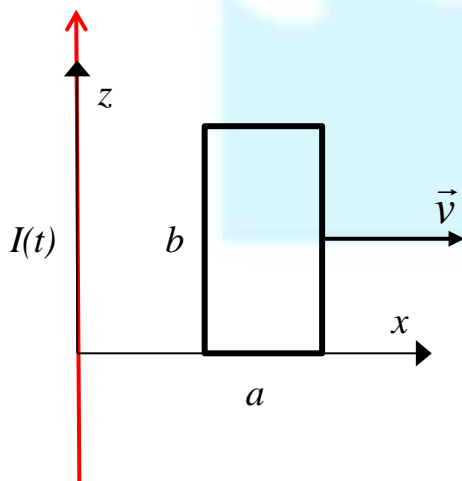
- Desde un sistema de referencia desde el cual se ve al circuito moverse con velocidad  $\vec{v}$

$$\varepsilon = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

**Nota:** No nos cabe duda de que lo expuesto en esta sección puede resultar algo oscuro. Nuestra intención es dar una visión superficial sobre la Ley de Faraday-Maxwell. Dejamos “oculta” la relación entre campos eléctricos y magnéticos vistos desde sistemas inerciales que se mueven a velocidades donde se puedan despreciar los efectos relativistas (de Einstein). Este tema podrán verlo con detalle en la materia “Electromagnetismo”. Si quieren adelantarse, recomendamos leer el Capítulo 8 de “Ingeniería Electromagnética” del Ing. Juan Carlos Fernández.

### 9.12. Un ejemplo: espira que se mueve en un campo magnético variable en el tiempo y en el espacio

Calcular la fem inducida en un circuito conductor rectangular indeformable de lados  $a$  y  $b$  que se aleja (a una velocidad  $v$  constante) de un cable muy largo por el que circula una corriente variable en el tiempo  $I(t)$  fijada por una fuente externa. El cable y el circuito son coplanarios. Discutir la polaridad de la fem si se sabe que la corriente aumenta al transcurrir el tiempo.



Como primer paso, recordamos la expresión del campo generado por un conductor rígido por el que circula una corriente  $I$  a partir de la Ley de Ampere. El sistema de coordenadas elegido corresponde al de la figura. Expresado en componentes y coordenadas cilíndricas  $\rho, \phi, z$ , el campo generado por el cable en todo el espacio está dado por

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi.$$

Como el movimiento se produce en el plano  $xz$ , la coordenada  $\rho$  corresponderá a la coordenada  $x$  y la coordenada  $\varphi$  a la coordenada cartesiana  $y$ . En consecuencia, en el plano  $xz$  el campo magnético está dado por

$$\vec{B}(x, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x} \vec{e}_y$$

Vamos a resolver este problema desde dos sistemas de coordenadas. El sistema  $S$  solidario al cable (sistema Cable o Laboratorio) y el sistema  $S'$  (sistema Circuito) solidario al circuito (que se mueve con velocidad  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  respecto al sistema  $S$ ). Debido a la geometría del problema, la coordenada  $\rho$  está identificada con la coordenada  $x$  mientras que el versor  $\vec{e}_\varphi$  corresponde al versor cartesiano  $\vec{e}_y$ .

Vamos a partir de

$$\varepsilon = - \frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\varepsilon = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Podemos usar el tercer miembro la segunda ecuación porque la espira no se deforma y se mueve a velocidad constante. En el sistema de referencia Laboratorio se puede calcular la *fem* tanto a partir de la primera como de la segunda ecuación, mientras que desde  $S'$  es más sencillo calcularlo a partir de la segunda ecuación.

### **Sistema de referencia solidario al cable por el que circula corriente $S$**

El cálculo de la *fem* inducida desde este sistema de referencia tiene la dificultad de la determinación de los límites de integración, y sobre todo poder distinguir las diferencias entre los límites a utilizar cuando el cálculo se hace a partir de a) la derivada total del flujo (primera ecuación) ó b) su descomposición en dos términos (segunda ecuación)

#### **a) Cálculo a partir de la derivada total temporal del flujo concatenado**

Para el cálculo de la *fem* desde el sistema solidario al cable por el que circula una corriente  $I(t)$  se plantea el flujo  $\Phi = \iint_{\text{espira}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$  a través de una superficie delimitada por la espira, teniendo en cuenta

la dependencia temporal del vector campo magnético tanto a través de la variación de la corriente como de la posición de la espira.

Al ser la velocidad de la espira constante, y suponiendo que en  $t=0$  es  $x=x_0$ , la espira estará delimitada

$$\text{al tiempo } t \text{ por } x(t) = \begin{cases} x_0 + vt \\ x_0 + a + vt \end{cases} \quad z(t) = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases}$$

Eligiendo como superficie al rectángulo delimitado por la espira, la normal a la superficie en la dirección  $\vec{e}_y$ , el flujo magnético resulta

$$\Phi(t) = \int_0^b dz \int_{x_0+vt}^{x_0+a+vt} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} b \ln \left( \frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt} \right)$$

Derivando respecto del tiempo y multiplicando por (-1), la fuerza electromotriz inducida en la espira, resulta

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \left( \frac{dI(t)}{dt} \ln \left( \frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt} \right) + I(t) v \left( \frac{1}{x_0 + a + vt} - \frac{1}{x_0 + vt} \right) \right)$$

**b) Cálculo a partir de la derivada temporal parcial del flujo concatenado y del movimiento de la espira**

Cuando se calcula la *fem* a través de  $\varepsilon = - \iint_{s(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ , la fuerza electromotriz

inducida puede pensarse como suma de dos *fems*: una debida a la variación temporal del campo magnético relacionada con un campo eléctrico inducido no conservativo a través de la Ley de

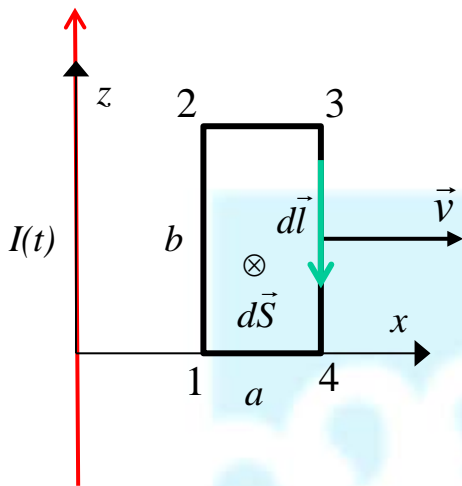
Faraday-Maxwell  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , y otra *fem* relacionada con el acomodamiento de cargas en la

espira debido a las fuerzas (fuerza de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ ) que ellas sufren cuando la espira cerrada está en movimiento en un campo magnético no uniforme, es decir,

$$\varepsilon = - \iint_{s(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \varepsilon_F + \varepsilon_M$$

donde elegiremos como superficie de integración el rectángulo delimitado por la espira. Como se eligió como normal a la superficie de integración la dirección  $\vec{e}_y$ , el diferencial de arco que le corresponde tendrá sentido horario, según el esquema de la figura.

$$\varepsilon_F = - \iint_{\text{espira}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \int_0^b dz \int_{x_0+vt}^{x_0+a+vt} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\partial I(t)}{\partial t} \frac{1}{x} dx = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \frac{dI(t)}{dt} \ln \left( \frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt} \right)$$



Para el cálculo de  $\varepsilon_M$ , la integral de línea se debe considerar como suma de 4 integrales, que corresponden a cada lado de la espira. Como el campo magnético generado por el hilo recto tiene sentido  $\vec{e}_y$  (si el sentido de la corriente es el indicado en la figura),  $\vec{v} \times \vec{B}$  tendrá sentido  $\vec{e}_z$  y el integrando será positivo, negativo o nulo según el segmento de la espira que se esté considerando: de 1 a 2 será positivo, de 2 a 3 y de 4 a 1 nulo, y de 3 a 4 negativo. Sin embargo, si se circula la espira será  $d\vec{l} = dz \vec{e}_z$  para los tramos paralelos al cable y

$d\vec{l} = dx \vec{e}_x$  para los tramos perpendiculares al mismo (los cuales no contribuyen a la integral de línea pues  $\vec{v} \times \vec{B}$  no tiene componente en esa dirección). Consecuentemente, la fem inducida  $\varepsilon_M$  estará dada por

$$\varepsilon_M = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_0^b v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x_{1-2}} dz + \int_b^0 v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x_{3-4}} dz$$

El cálculo de esta integral puede presentar dos dificultades: 1) considerar el signo de dos veces en el tramo 3-4 (al hacer el producto escalar y al poner los límites de integración), y 2) poner en cada tramo el valor de  $x$  que corresponde al tramo. En el caso del tramo 1-2, el campo magnético debe ser evaluado en  $x = x_0 + vt$ , mientras que en el tramo 3-4 será evaluado en  $x = x_0 + a + vt$ . Entonces

$$\varepsilon_M = \int_0^b v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x_{1-2}} dz + \int_b^0 v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x_{3-4}} dz = v \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \left( \int_0^b \frac{1}{x_0 + vt} dz + \int_b^0 \frac{1}{x_0 + a + vt} dz \right)$$

En consecuencia, la fem inducida “por movimiento” está dada por

$$\varepsilon_M = vb \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \left( \frac{1}{x_0 + vt} - \frac{1}{x_0 + a + vt} \right)$$

La fem total inducida así obtenida,  $\varepsilon_F + \varepsilon_M$ , coincide con la obtenida en a).

### Sistema de referencia $S'$ solidario a la espira

Como en el sistema solidario a la espira, las cargas contenidas en la misma están en reposo con respecto al sistema de referencia,

$$\varepsilon = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \varepsilon_F + 0 = - \iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$



En este sistema (donde hemos considerado el origen de coordenadas en el vértice notado como “1” en la figura) los límites de la espira están dados para todo  $t$  por

$$x'(t) = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases} \quad z'(t) = \begin{cases} 0 \\ b \end{cases}$$

La relación entre las coordenadas  $(x, y, z)$  del sistema  $S$  y las del sistema de referencia inercial  $S'$   $(x', y', z')$  que se mueve con velocidad  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ , está dada por

$$x = x' + x_0 + vt \quad y = y' \quad z = z'$$

y el campo magnético en el sistema  $S'$  estará dado por<sup>11</sup>

$$\vec{B}(x', t) = \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x' + x_0 + vt} \vec{e}_y$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \varepsilon &= - \iint_{\text{espira}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}' = - \int_0^a dx' \int_0^b \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0}{2\pi} I(t) \frac{1}{x' + x_0 + vt} \right) dz' = \\ &= - \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^a dx' \int_0^b \left( \frac{\partial I(t)}{\partial t} \frac{1}{x' + x_0 + vt} - I(t) \frac{v}{(x' + x_0 + vt)^2} \right) dz' \end{aligned}$$

Integrando respecto de las coordenadas se obtiene una expresión de la *fem* idéntica a la obtenida anteriormente. Es decir,

$$\boxed{\varepsilon(t) = - \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left( \frac{dI(t)}{dt} \ln \left( \frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt} \right) + I(t) v \left( \frac{1}{x_0 + a + vt} - \frac{1}{x_0 + vt} \right) \right)}$$

### **Observaciones**

La resolución de este problema por distintos métodos presenta la ventaja de permitir hacer un análisis de la validez de las distintas “fórmulas” que aparecen en algunos libros de texto. Además, la expresión utilizada para la *fem* permite distinguir claramente los casos campo magnético variable en el tiempo (debido a la corriente en el cable variable en el tiempo) y espira estática, y el caso de campo no dependiente del tiempo y espira cerrada móvil en un campo no-uniforme. Se puede hacer, de esta manera, un análisis detallado de la polaridad de la *fem* dependiendo no sólo del sentido de la corriente que circula por el cable infinito (es decir del sentido del campo magnético) sino también de su variación.

A partir de

<sup>11</sup> Esto corresponde a que los campos magnéticos sean los mismos en los dos sistemas de coordenadas, lo que es válido dentro de la consideración  $v \ll c$ ,

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \frac{dI(t)}{dt} \ln\left(\frac{x_0 + a + vt}{x_0 + vt}\right) - \frac{\mu_0 b}{2\pi} I(t) v \left(\frac{1}{x_0 + a + vt} - \frac{1}{x_0 + vt}\right)$$

El primer término del segundo miembro de esta ecuación muestra que cuando la espira permanece en reposo, el signo de la *fem* está dado por el crecimiento (o decrecimiento) de la corriente (o sea del campo magnético creado por el cable) pues el factor que contiene al logaritmo es siempre positivo. El segundo término, en cambio, deja en claro que cuando la espira con corriente constante se aleja del cable, el signo de la *fem* queda determinado por el sentido de la corriente. Por otra parte, es fácil extender este problema al caso en que la velocidad de la espira tenga una componente paralela al cable.

Es conveniente en esta etapa hacer la consideración de corriente constante y espira que se mueve respecto al cable, donde el primer término del segundo miembro de la ecuación es nulo. También se puede considerar otro caso límite, es decir, espira en reposo y corriente que, por ejemplo, crece en el tiempo, en cuyo caso la *fem* es negativa, lo que significa que si la espira fuera conductora, la corriente inducida en la misma debería crear un campo magnético en la dirección  $-\vec{e}_y$ . Así la corriente circularía en sentido antihorario. Entre estos dos casos, se pueden analizar distintas situaciones.

### 9.13. El campo eléctrico inducido (no conservativo)

Volvamos a la reinterpretación de la Ley de Faraday hecha por Maxwell. Maxwell asoció la *fem* inducida a un campo eléctrico no conservativo (su circulación corresponde a la *fem*). Así, lo que “impulsa” a los portadores libres de carga de un conductor cerrado a moverse es ese *campo eléctrico inducido*. Y la existencia de este campo eléctrico es independiente de que exista o no el circuito conductor. Si el circuito fuera dieléctrico, los dipolos se orientarían debido a ese campo eléctrico.

Según la Ley de Faraday-Maxwell en forma diferencial tendremos  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ .

Recordando propiedades de las funciones vectoriales de Análisis II, la solución de estas ecuaciones diferenciales lleva a un resultado no nulo para  $\vec{E}$ . Es decir, existe un campo eléctrico (no conservativo porque es rotacional<sup>12</sup>) y solenoidal (divergencia nula) solo por la existencia de un campo magnético dependiente del tiempo. Ese campo eléctrico inducido puede depender del tiempo (depende de cómo sea la dependencia del campo magnético con el tiempo).

Lo más notable es que si no existe ningún circuito, el campo existe igual. ¿Con qué evidencia experimental podemos afirmar esto? Comencemos que un experimento “pensado”. Pensemos un punto del espacio (sin cargas ni corrientes) donde el campo magnético varíe con el tiempo. Si colocamos una carga de prueba inmóvil en ese punto, ella sentirá el efecto del campo eléctrico inducido. Y si, además,

<sup>12</sup> Si fuera irrotacional y solenoidal, la única solución posible sería un campo eléctrico uniforme y constante.

la carga de prueba se moviera, la fuerza total sobre ella estaría dada por la Fuerza de Lorentz

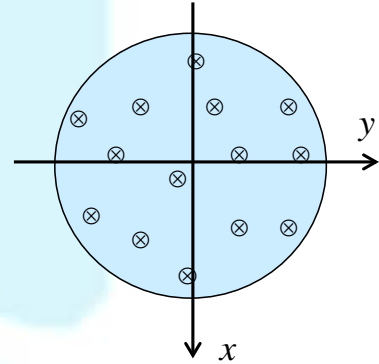
$$\vec{F}(\vec{r}) = q_0 \left( \vec{E}_{inducido}(\vec{r}) + \vec{v}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \text{ donde } \vec{\nabla} \times \vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Vamos ahora a aplicar esta nueva concepción de campo eléctrico a un ejemplo que, si bien parece ideal, puede ser realizado en el Laboratorio.

Supongamos que en una zona del espacio sin cargas y en vacío (zona cilíndrica infinita) existe un campo magnético uniforme pero que depende del tiempo. Según la Ley de Faraday-Maxwell (en forma integral y en forma diferencial)

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donde, para generalizar, el campo eléctrico considerado es el total (conservativo y no conservativo) aunque sabemos que el conservativo no contribuye a ninguna de las ecuaciones porque es conservativo o irrotacional. Si el campo magnético tiene dirección  $z$ , el campo eléctrico solamente puede tener componentes  $x$  e  $y$  (todo deducido de la ecuación diferencial). Como no hay cargas según lo que postulamos, debe ser  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ . Esto lleva a que las líneas de campo eléctrico deben ser cerradas. Y como las líneas son cerradas el campo eléctrico solo puede tener solamente componente  $\vec{e}_\phi$  (si tuviera una componente radial, la divergencia no sería nula). Por otra parte, por la simetría de la configuración, el campo eléctrico no puede depender en forma diferente de las coordenadas  $x$  e  $y$ ; solamente puede depender de  $\rho$ . Es decir las líneas de campo eléctrico inducido deben ser circunferencias.

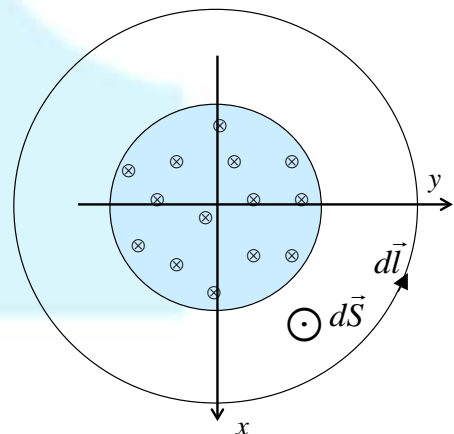


Calculemos la fem inducida a partir de la Regla del Flujo. Pero... ¿qué superficie y qué curva elegimos? ¿Va a depender la fem de la curva (que no es un circuito) y superficie elegidas?

Para eso vamos a considerar primero una curva en forma de circunferencia centrada (porque es muy fácil calcularla). Como  $\vec{B} = B(t)(-\vec{e}_z)$  y  $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$ , la fem inducida vale:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = +\frac{d}{dt} \iint_{S(C)} B dS = \begin{cases} \frac{dB}{dt} \pi \rho^2 & \rho < R \\ \frac{dB}{dt} \pi R^2 & \rho > R \end{cases}$$

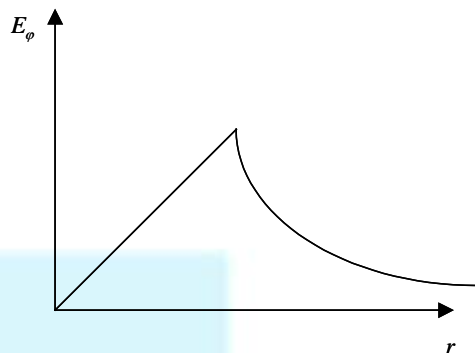
Una vez determinado el sentido del diferencial de superficie, el sentido del diferencial de longitud queda unívocamente determinado  $d\vec{l} = dl \vec{e}_\phi$ . Definiendo  $\vec{E} = E(\rho) \vec{e}_\phi$ , la circulación del campo eléctrico inducido resulta



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(\rho) 2\pi\rho$$

En consecuencia,

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\vec{e}_\rho = \begin{cases} \frac{dB}{dt} \frac{\rho}{2} \vec{e}_\phi & \rho < R \\ \frac{dB}{dt} \frac{R^2}{2\rho} \vec{e}_\phi & \rho > R \end{cases}$$



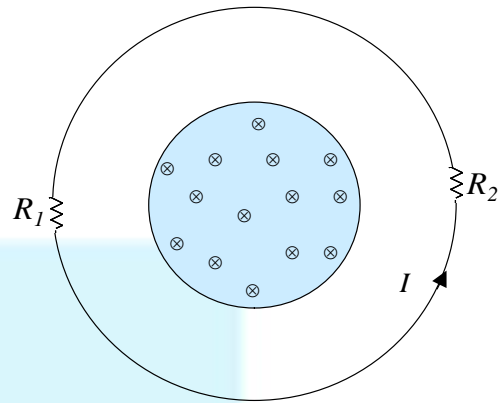
El sentido del campo eléctrico depende de que el campo magnético crezca o decrezca en el tiempo y tiene dirección tangencial (según el sistema de coordenadas elegido).

Si el campo magnético hubiera tenido el otro sentido, lo único que hubiera cambiado es el producto escalar entre el campo y la superficie (lo que es equivalente a considerar  $B(t) < 0$ ). Es decir, hubiéramos obtenido que el campo eléctrico inducido tenía sentido  $-\vec{e}_\phi$  si el campo magnético era creciente. Resumiendo:

- 1) Si el campo magnético tiene sentido entrante y aumenta en el tiempo:  $\vec{E}$  tiene sentido antihorario.
- 2) Si el campo magnético tiene sentido entrante y disminuye en el tiempo:  $\vec{E}$  tiene sentido horario.
- 3) Si el campo magnético tiene sentido saliente y aumenta en el tiempo:  $\vec{E}$  tiene sentido horario.
- 4) Si el campo magnético tiene sentido saliente y disminuye en el tiempo:  $\vec{E}$  tiene sentido antihorario.

Si hubiera colocáramos una carga en algún punto del espacio, ella se aceleraría. Si se colocara un hilo conductor con la forma de la curva, aparecería una corriente (recordar del Capítulo 5 que el sentido de la densidad de corriente coincide con la del campo eléctrico). ¿Es coherente esto con la Ley de Faraday-Lenz? En el dibujo, si  $\vec{B}(t)$  aumenta con el tiempo, por la Ley de Lenz debe crearse un campo magnético saliente para tratar de impedir que el flujo cambie, i.e. la corriente circularía en sentido antihorario. Si el campo tuviera el otro sentido y disminuyera en el tiempo, por ejemplo, debería aparecer una  $I$  que aumentara el campo, i.e. que creara un campo magnético saliente. Así también sería en sentido antihorario. Así se ‘piensa’ que ese campo eléctrico es el que hace que las cargas circulen; es el responsable de la *fem*. Cuando en un circuito ponemos una pila, sabemos dónde está la responsable de que los portadores de carga circulen debido al campo eléctrico que ella genera. Pero en este dispositivo, ¿dónde está la *fem*? La respuesta sería: en todos lados. Quizá la pregunta sea inadecuada ... Por eso Maxwell pensó solamente en campos eléctricos y magnéticos. Sin embargo, desde el punto de vista tecnológico, pensar en términos de *fem* es muy conveniente a bajas frecuencias (que corresponde al dominio de los circuitos eléctricos).

Pero, de todas formas, el modelo de la *fem inducida* acarrea varios problemas que a veces dificultan la comprensión de algunas situaciones experimentales (iremos viendo varias de ellas de a poco). Comencemos por una aparente paradoja: colocamos dos resistencias  $R_1$  y  $R_2$  en un circuito conductor (para la figura hemos considerado que el campo magnético aumenta en el tiempo). Es fácil ver que  $I(R_1 + R_2) \neq 0$  a pesar de que



el circuito está cerrado. ¿Es correcto? ¿Qué mediríamos con un voltímetro colocado sobre  $R_1$  y sobre  $R_2$ ? ¿Depende de cómo coloquemos el voltímetro? Es un problema bastante complejo (desde todo punto de vista) pero ya fue resuelto experimental y teóricamente<sup>ix</sup>.

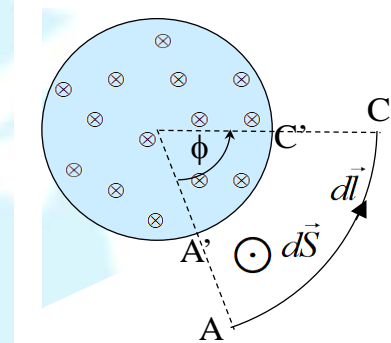
Ahora supongamos que a una cierta distancia  $a$  del centro  $O$ , tenemos un hilo de forma circular de largo  $L$ . Calculemos la circulación del campo a lo largo del

triángulo circular  $\widehat{OACO}$

$$\oint_{\widehat{OACO}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^O \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

pues el campo eléctrico inducido es acimutal. Si  $a > R$ , la *fem inducida* resulta

$$fem = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{dB}{dt} \frac{R^2}{2a} \widehat{AC} = \frac{dB}{dt} \frac{R^2}{2a} a \phi = \frac{dB}{dt} \frac{R^2}{2} \phi$$



Esta no es la única forma de calcularla. Si aplicamos la Regla del Flujo, obtenemos

$$-\frac{d}{dt} \iint_{S(c)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = + \frac{dB}{dt} \widehat{OA'C'} = \frac{dB}{dt} \frac{R^2 \phi}{2}$$

ya que el área donde el campo magnético no es nulo corresponde a la del triángulo circular  $OA'C'$ . Es decir, obtuvimos lo mismo. Observar que la *fem* es, en este caso, independiente de el radio  $a$  del arco.

Si, en cambio, consideramos que  $a < R$

$$fem = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^O \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{dB}{dt} \frac{a}{2} \widehat{AC} = \frac{dB}{dt} a^2 \phi$$

Idéntico resultado se obtendría a partir de la Regla del Flujo. Hay que observar que, en este caso, la *fem inducida* depende de  $a$ .

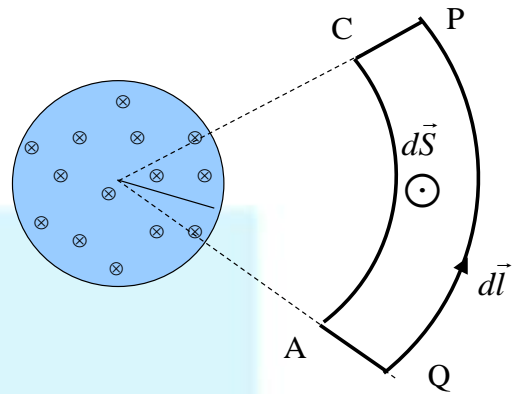


Podemos explicar, ahora qué ocurre cuando se tiene una espira conductora cerrada fuera de la zona de campo.

Por un lado, está claro que  $\iint_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  por lo que,

desde el punto de vista de la Regla del Flujo, la *fem inducida* es nula. Desde el punto de vista de la circulación del campo eléctrico, las contribuciones en

los tramos  $\widehat{AC}$  y  $\widehat{PQ}$  se compensan debido a que el largo del arco es directamente proporcional a la distancia al centro y el campo eléctrico es inversamente proporcional a ella. Entonces la *fem inducida* es nula y no circulará corriente aunque el circuito sea conductor.

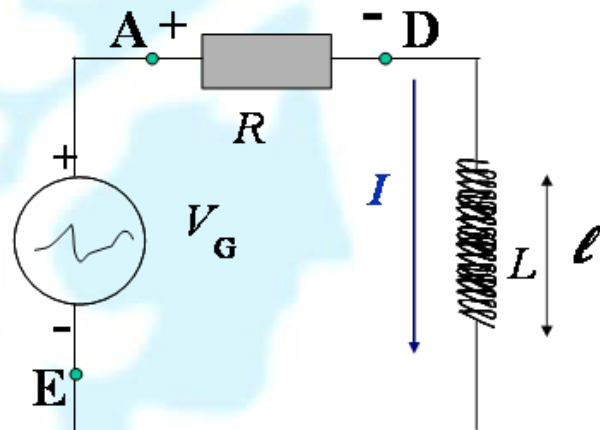


## ***Segunda Parte: Ley de Faraday-Maxwell aplicada a los circuitos con corrientes dependientes del tiempo***

### ***9.14. Autoinductancia y fem inducida***

Vamos a aplicar la Ley de Faraday-Lenz a una aplicación tecnológica de muchísima importancia. Consideraremos “circuitos eléctricos” alimentados con fuentes o *fems* dependientes del tiempo y con elementos que generan campos magnéticos por el paso de la corriente como el de la figura. El o los campos magnéticos generados dependerán del tiempo y, consecuentemente, el flujo del campo magnético variará porque varía la corriente. Puede ser una corriente alterna (el vector densidad de corriente  $\vec{J}$  varía su sentido en el tiempo) o una corriente continua variable en el tiempo (el vector densidad de corriente  $\vec{J}$  no varía su sentido en el tiempo).

Supongamos que tenemos un generador  $V_G$  que genera una corriente alterna conectado a un solenoide (de sección  $A$  y largo  $\ell$ ) con  $N$  vueltas de alambre muy densamente arrolladas. Supondremos que el núcleo es de aire o de otro material lineal. La resistencia  $R$  tiene en cuenta la resistencia de todo el circuito. Para simplificar el modelo, vamos a considerar que podemos despreciar los efectos de borde y considerar que el campo magnético generado por el solenoide se puede aproximar al que genera un solenoide ideal y de largo infinito: paralelo al eje del solenoide y de valor



$$B = \frac{\mu K}{2} 2 = \mu K = \mu \frac{NI}{\ell} = \mu nI$$

donde  $K$  representa la densidad superficial de corriente y  $n$  la densidad de espiras. Como el flujo concatenado por cada una de sus espiras es  $\Phi_1 = \mu nIA$ , el concatenado por las  $N$  espiras será  $\Phi_1 = N\mu nIA$ . En consecuencia, la *fem inducida* “en y por la bobina” (la llamaremos “*fem autoinducida*”) será

$$\varepsilon_{\text{autoinducida}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu nNA \frac{dI}{dt} = -\mu n^2 \ell A \frac{dI}{dt}$$

Recordemos lo realizado en el Capítulo 5 para definir la resistencia eléctrica de un material de forma cilíndrica de sección  $A$  y largo  $\ell$ : vimos que la relación entre diferencia de potencial y corriente era una cantidad que dependía de las características del material, de su largo y de su sección. Y así definimos resistencia. Acá tenemos algo parecido, excepto que en lugar de diferencia de potencial tenemos una

$\mathcal{E}_{autoinducida}$  y en lugar de corriente  $I$  tenemos  $\frac{dI}{dt}$ . Aprovechando esta semejanza, definimos

**autoinductancia**  $L$  del solenoide como

$$L \equiv \mu nNA = \mu n^2 \ell A = \mu N^2 \frac{A}{\ell}$$

Para el solenoide con núcleo lineal la autoinductancia es directamente proporcional a su sección e inversamente proporcional a su largo y depende de sus propiedades magnéticas a través de la permeabilidad. Observemos que si el material no hubiera sido lineal, hubiéramos podido calcular  $\vec{H}$  que no guarda relación lineal con  $\vec{B}$ , y, en consecuencia, no hubiéramos podido calcular su flujo sin considerar la curva de histéresis.

Pero si el núcleo es lineal (o se trabaja en una zona que a los fines prácticos es lineal) el campo  $\vec{B}$  siempre sigue una relación lineal con  $I$  (y con  $\vec{H}$ ). Bajo estas condiciones siempre resulta

$$\mathcal{E}_{autoinducida} = -\frac{d\Phi}{dt} \equiv -L \frac{dI}{dt}$$

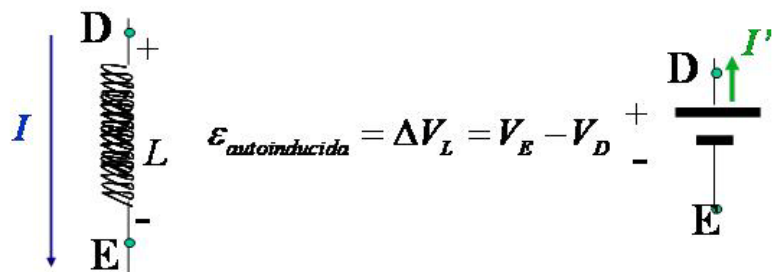
Y la definición de autoinductancia en forma general es  $L \equiv \frac{d\Phi}{dI}$ <sup>13</sup>.

Por supuesto, el cálculo de la autoinductancia lo hicimos en un caso ideal. Aunque la longitud del solenoide sea muy apreciable frente al radio, no todo el flujo contribuye efectivamente a la  $\mathcal{E}_{autoinducida}$ . Lo que se hace medir la *fem autoinducida* y de allí determinar la autoinductancia  $L$  (como al determinar experimentalmente una resistencia  $R$ ). Es decir, lo que ocasiona el voltaje entre los bornes del solenoide es la autoinductancia  $L$ . Por eso se dice que la caída de tensión en la autoinductancia está dada por

$$\Delta V_L = -L \frac{dI}{dt}$$

Determinar cuál de los bornes es el que está a mayor voltaje dependerá de que la corriente disminuya o aumente con el tiempo. Está claro que si la corriente aumenta con el

tiempo es  $\Delta V_L = -L \frac{dI}{dt} < 0$ : la tensión “es negativa” y cae la tensión en la  $L$ . Podemos graficarlo de la siguiente manera



<sup>13</sup> Como con una resistencia  $R$ , que termina siendo definida como  $R \equiv \frac{\Delta V}{I}$ .

Pensemos en el sentido de la corriente inducida  $I'$ : Si la corriente  $I$  aumenta en el tiempo, por la Ley de Lenz se inducirá una corriente que trate de compensar este aumento. Es decir, debe ser de sentido contrario (no importa cómo esté arrollado el solenoide). Entonces la  $\mathcal{E}_{\text{autoinducida}}$  sería equivalente “a una pila” con la polaridad indicada.

Las unidades de  $L$  se obtienen a partir de su definición:

Esta unidad tiene un nombre particular: Henrio o Henry (en homenaje a Joseph Henry)

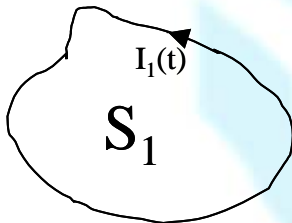
$$[L] = \frac{[\mathcal{E}]}{[I]} [t] = \frac{Vs}{A} = \Omega \cdot s = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Wb}{A} \equiv Hy$$

**Observación:** El propio circuito es una espira por la que circula corriente por lo que habrá una *fem inducida* “extra”. Pero, vamos a despreciar este efecto (se tiene en cuenta al construir los circuitos que el circuito mismo puede influir)

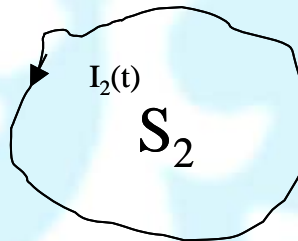
### 9.15. Autoinductancia e Inductancia Mutua (un desarrollo más formal)

¿Qué ocurre si tenemos más de un solenoide por los que circulan corrientes distintas? Supongamos primero dos circuitos por los que circulan corrientes dependientes del tiempo. Aplicaremos la Ley de Faraday a este “dispositivo” y a partir del resultado podremos hacer una generalización.

Circuito 1



Circuito 2



Cada circuito genera un campo magnético y concatena un flujo debido a su propia corriente y a la de su vecino. Supongamos que el Circuito 1 produce un campo magnético  $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$  en todo el

espacio y el Circuito 2 genera  $\vec{B}_2(\vec{r}, t)$ . Por lo tanto, cada uno de los circuitos concatena flujo debido al campo que él mismo genera y al campo generado por el otro circuito. Así podemos escribir los flujos totales concatenados por cada circuito como

$$\Phi_{T_1} = \iint_{S_1} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

$$\Phi_{T_2} = \iint_{S_2} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \Phi_{21} + \Phi_{22}$$

En consecuencia, aparecerán dos *fems inducidas* (cada una proveniente del campo propio y el campo generado por la otra). En el Circuito 1

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{T_1}}{dt} = -\frac{d(\Phi_{11} + \Phi_{12})}{dt} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d\Phi_{11}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt}$$

y en el Circuito 2

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{T_2}}{dt} = -\frac{d(\Phi_{21} + \Phi_{22})}{dt} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dt} = -\frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt}$$

Se definen, entonces

$$L_1 \equiv \frac{d\Phi_{11}}{dI_1} \quad M_{12} \equiv \frac{d\Phi_{12}}{dI_2}$$

$$M_{21} \equiv \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \quad L_2 \equiv \frac{d\Phi_{22}}{dI_2}$$

Los coeficientes  $L_1$  y  $L_2$  corresponden a la autoinductancia de cada circuito mientras que los coeficientes  $M_{ij}$  se denominan coeficientes de inducción mutua.

Es decir, la autoinductancia da la “rapidez” de cambio de flujo debido al cambio en la corriente que circula por ella, mientras que la inductancia mutua da la “rapidez” con que cambia el flujo debido al cambio de corriente en el otro circuito. Se puede demostrar que en circuitos donde no hay materiales ferromagnéticos siempre  $M_{ij} = M_{ji}$  (la demostración excede el nivel del curso).

### 9.16. Cálculo de autoinductancias e inductancias mutuas

Ejemplo 1: Veamos un ejemplo relativamente sencillo si hacemos algunas consideraciones. Son dos espiras concéntricas y coplanares. Las líneas de campo no son sencillas pero podríamos considerar que dentro de la espira más pequeña el campo magnético  $\vec{B}_1$  (debido a la  $I_1(t)$ ) es uniforme y su valor se podría aproximar al correspondiente al centro de la

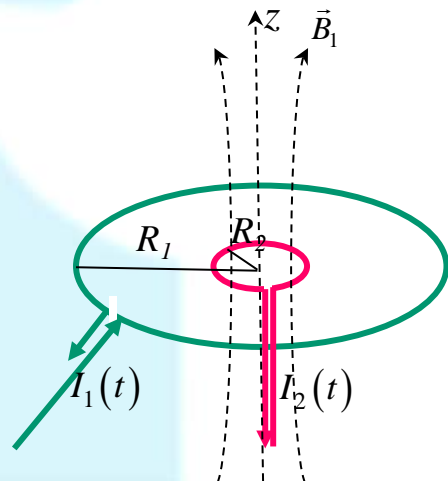
espira. Es decir,  $\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I_1(t)}{2R_1} \vec{e}_z$ .

Tomamos el sentido indicado en la figura para la corriente como positivo y, en consecuencia, el diferencial de superficie asociado debe tener el sentido de  $\vec{e}_z$ . Vamos a calcular la inductancia mutua  $M_{21}$ . Es decir, estamos considerando cómo varía el flujo en el Circuito 2 debido al cambio de la corriente  $I_1(t)$ .

Como vimos,

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{11}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$$





En consecuencia,

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} = \frac{d}{dI_1} \left[ \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \right] = \frac{d}{dI_1} \left[ \iint_{S_2} \frac{\mu_0 I_1(t)}{2R_1} \vec{e}_z \cdot d\vec{S}_2 \right] = \frac{d}{dI_1} \left[ \frac{\mu_0 I_1(t)}{2R_1} \pi R_2^2 \right] = \frac{\mu_0}{2R_1} \pi R_2^2$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{2R_1} \pi R_2^2$$

Si el Circuito 1 tiene  $N_1$  espiras y el Circuito 2 tiene  $N_2$ , el campo generado por  $I_1(t)$  será  $N_1$  veces el generado por una de sus espiras y el flujo concatenado por el circuito 2 será  $N_2$  veces el concatenado por una de sus espiras. En consecuencia, en forma más general

$$M_{21} = N_1 N_2 \frac{\mu_0}{2R_1} \pi R_2^2$$

¿Cómo calculamos  $M_{12}$ ? La aproximación de que el campo generado por la espira más pequeña es uniforme sobre toda la espira grande ya suena bastante descabellada. Entonces, habría que calcular el campo por la Ley de Ampere sobre toda la espira grande debido a la corriente  $I_2(t)$  o confiar en el resultado  $M_{21} = M_{12}$  que dijimos se demostrará en Electromagnetismo.

Para calcular la autoinductancia  $L_1$ , deberíamos considerar (como hicimos con el solenoide) que el campo es uniforme en la espira 1 (o calcular el campo por la Ley de Ampere sobre toda la espira). En ese caso

$$L_1 = \frac{d\Phi_{11}}{dI_1} = N_1^2 \frac{\mu_0}{2R_1} \pi R_1^2 = N_1^2 \frac{\mu_0}{2} \pi R_1$$

Idéntico procedimiento para calcular  $L_2$  aunque para ser consistente con lo realizado hasta ahora deberíamos hacer el tedioso trabajo de calcular el campo sobre toda la superficie de la espira.

Entonces, si originalmente circulaba una corriente por la espira 1 (variable en el tiempo) habrá *fems autoinducidas* en ambos circuitos

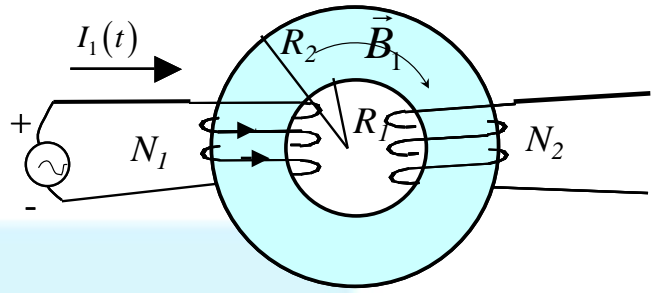
$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

Ejemplo 2: Pero hay otro dispositivo (toroide) donde podemos calcular (dentro de ciertas aproximaciones) las autoinductancias y las inductancias mutuas. Consideraremos que: 1) el toroide angosto 2) no hay campo fuera de los bobinados 3) el material del núcleo es lineal

Dentro de nuestro modelo, la corriente  $I_1(t)$  genera un campo magnético

donde  $R$  es el radio medio. Como el segundo bobinado está **abierto**, no puede circular corriente por él y no genera ningún campo magnético. Podemos escribir que las *fems* autoinducidas en los bobinados 1 (primario) y 2 (secundario) son, respectivamente:



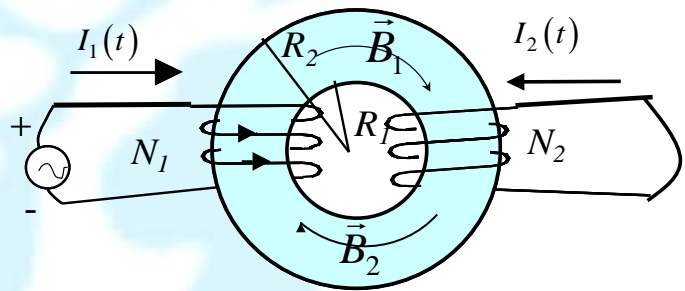
$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Es decir, en el segundo bobinado se induce una *fem* debido a la variación de la corriente en el primario pero no circula corriente.

Si el segundo bobinado estuviera cerrado podría circular una corriente (aunque no tuviera un generador) que llamaremos  $I_2(t)$  y ésta produciría un campo  $\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2 I_2}{2\pi R} \vec{e}_\varphi = \mu_0 n_2 I_2(t) \vec{e}_\varphi$ .

El sentido se debe a cómo está enrollado el conductor y al sentido asignado a la corriente  $I_2(t)$ .



Calculemos todos los flujos para luego calcular las *fems*:

$$\Phi_{11} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \approx N_1^2 I_1(t) \frac{\mu_0}{2\pi R} \pi a^2 = \mu_0 N_1^2 \frac{a^2}{2R} I_1(t) \quad \text{es decir,} \quad L_1 = \mu_0 N_1^2 \frac{a^2}{2R}$$

$$\Phi_{12} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = N_1 N_2 I_2(t) \frac{\mu_0}{2\pi R} \pi a^2 = \mu_0 N_1 N_2 \frac{a^2}{2R} I_2(t) \quad \text{es decir,} \quad M_{12} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{a^2}{2R}$$

En el segundo bobinado habrá también un cambio de flujo y

$$\Phi_{22} = \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} \approx N_2^2 I_2(t) \frac{\mu_0}{2\pi R} \pi a^2 = \mu_0 N_2^2 \frac{a^2}{2R} I_2(t) \quad L_2 = \mu_0 N_2^2 \frac{a^2}{2R}$$

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = N_1 N_2 I_1(t) \frac{\mu_0}{2\pi R} \pi a^2 = \mu_0 N_1 N_2 \frac{a^2}{2R} I_1(t) \quad M_{21} = \mu_0 N_1 N_2 \frac{a^2}{2R}$$

Vemos que en este caso se cumple

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$$

Observemos que todo el flujo de uno es concatenado por sí mismo y por el vecino. En la experiencia eso no ocurre y usualmente  $M_{12} = M_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}$ , donde  $k$  se llama **factor de acoplamiento**.

Dependerá, fundamentalmente, de la geometría del sistema.

Si no hay pérdidas de flujo (factor de acoplamiento unitario), tendremos

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_1}{dt}$$

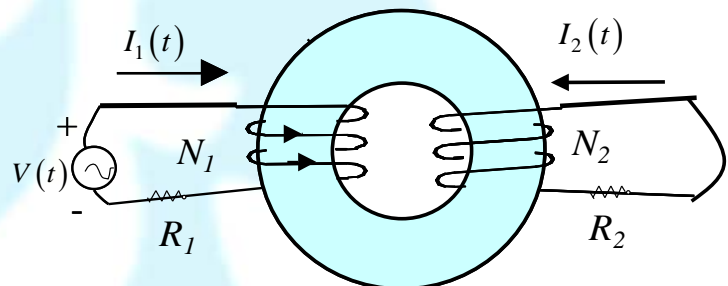
$$\frac{dI_1}{dt} = - \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt}}{L_1}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt}}{L_1} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \varepsilon_1 \frac{N_2}{N_1}$$

resultado más que interesante ya que se induce una *fem inducida* en el secundario que puede ser relacionada muy fácilmente con la *fem inducida* en el primario.

Pero avancemos un poco más... ¿Cuánto valen las corrientes? El circuito 1 tendrá una resistencia  $R_1$  y el circuito 2,  $R_2$ .

En el circuito 1 tendremos: la fuente  $V(t)$ , la fem inducida  $\varepsilon_1$  y la caída de tensión en la resistencia  $R_1$ . En el 2 no tendremos fuente. En consecuencia, si bien podemos pensarlo de varias formas, tendremos



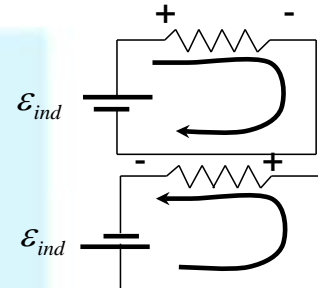
$$V(t) - I_1(t)R_1 + \varepsilon_1 = V(t) - I_1(t)R_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$-I_2(t)R_2 + \varepsilon_2 = -I_2(t)R_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = 0$$

Tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas:  $I_1(t)$  e  $I_2(t)$  pero ambas funciones del tiempo. Pero estas ecuaciones están acopladas por lo que su resolución no es trivial. Sin embargo, podemos determinar el sentido de  $I_2(t)$  dado el de  $I_1(t)$  y sabiendo si  $I_1(t)$  crece o decrece en el tiempo. También es necesario saber cómo están bobinados los conductores. Según la figura, el campo generado por la corriente  $I_2(t)$  (con el sentido asignado en la figura) generaría un campo magnético del mismo

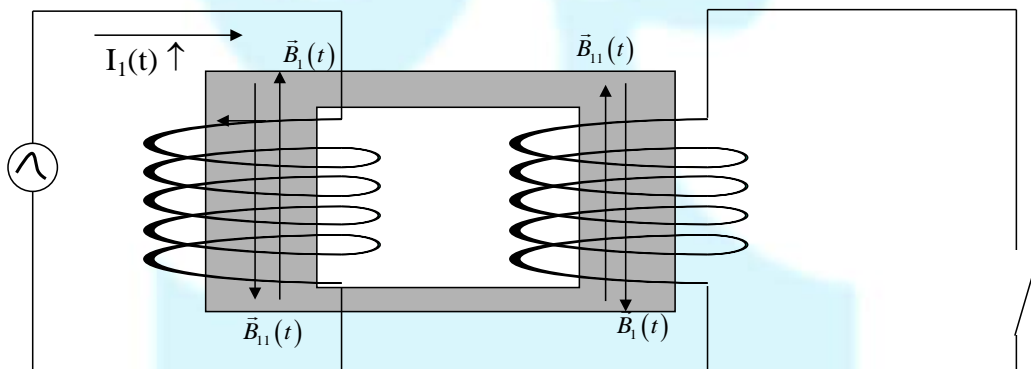
sentido que el originado por la corriente  $I_1(t)$ . Supongamos que la corriente  $I_1(t)$  aumentara en el tiempo, es decir, el campo  $\vec{B}_1$  aumentaría en el tiempo. Por la Ley de Lenz, la  $\varepsilon_2$  debe ser tal que la corriente inducida produzca un campo magnético  $\vec{B}_2$  de sentido contrario a  $\vec{B}_1$ . Entonces, la corriente  $I_2(t)$  debe tener sentido contrario al dibujado. Podemos representar esa *fem inducida*  $\varepsilon_2$  como en la figura superior de la derecha.

Si, en cambio,  $I_1(t)$  decreciera en el tiempo, la situación en el secundario estaría representada por la figura inferior de la derecha

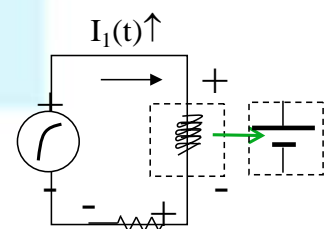


### 9.17. Los campos magnéticos y las corrientes que los producen

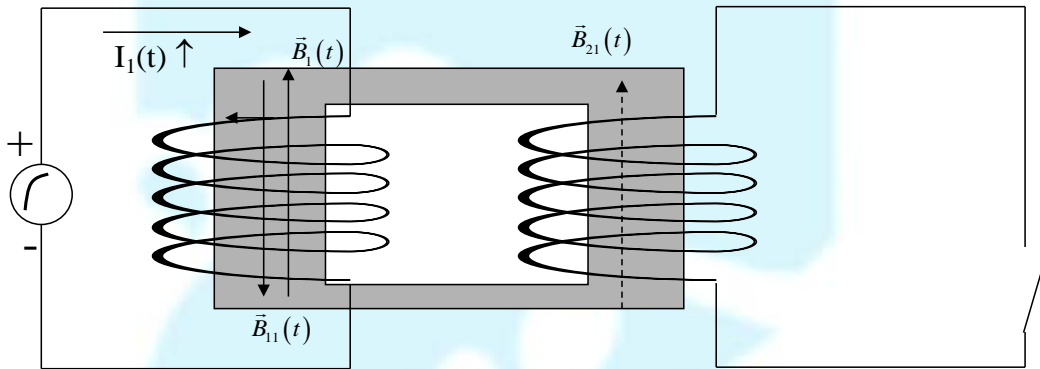
Una de las dificultades con la que nos encontramos a menudo se debe a que se tiende a confundir el sentido del campo con su crecimiento o decrecimiento. Vamos a analizar los campos magnéticos generados en un “circuito magnético” como el de la figura. Por supuesto que vamos a utilizar todas las aproximaciones detalladas en el Capítulo 8 y nos enfocaremos solo en la Inducción Electromagnética. En el circuito primario se coloca una fuente de tensión que puede variar en el tiempo. El circuito secundario está **abierto**. Supongamos que la corriente es constante al comienzo de la experiencia. Se establecerá solo un campo magnético constante y uniforme  $\vec{B}_1$  en todo el circuito que proviene del arrollamiento del primario únicamente (como vimos en el Capítulo 8) porque no circula corriente por el secundario.



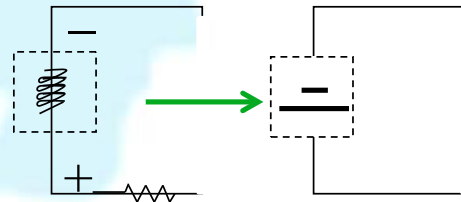
Ahora consideremos que la corriente comienza a aumentar. Eso significa que el flujo a través de la bobina 1 comienza a aumentar (porque aumenta  $\vec{B}_1$ ). Este aumento de flujo lleva a la aparición de una  $\varepsilon_1$  en el primario que genera una corriente tal que aparece un campo  $\vec{B}_{11}$  que trata de compensar el aumento de flujo. Podemos esquematizar el primario como en la figura.



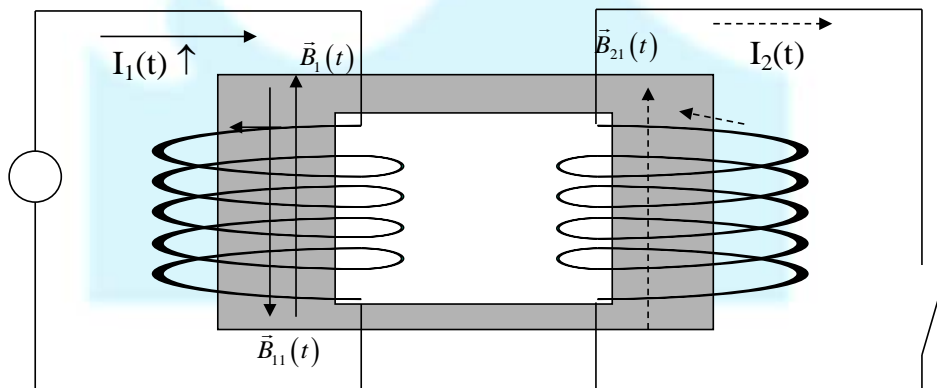
¿Qué ocurre en el secundario? El campo magnético en el secundario será el mismo que en el primario, es decir,  $\vec{B}_1 + \vec{B}_{11}$ . Por el secundario no puede pasar ninguna corriente porque el circuito está abierto. Pero eso no impide que se induzca una *fem* que (de estar el circuito cerrado) haría aparecer una corriente de sentido tal que el campo generado fuera como el  $\vec{B}_{21}$ . Pero hasta que no se cierre el circuito, esa corriente no va a aparecer y no habrá campo  $\vec{B}_{21}$ .



¿Cuál debería ser el sentido de la corriente inducida? Eso va a depender de cómo estén hechos los arrollamientos. Lo que es seguro es que los campos deben tener los sentidos indicados. Tal como están dibujados, si el circuito secundario se cerrara, la corriente inducida en el secundario debería circular en sentido antihorario. Es decir, podemos representar al secundario por

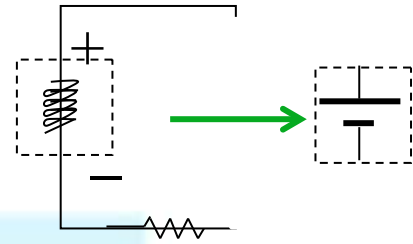


Pero si cambiamos el sentido del arrollamiento del secundario, el sentido de la corriente inducida que se generaría sería “horario” si la corriente del primario aumentara





En este dispositivo, podemos pensar que en el secundario tenemos un equivalente a



Pero, independientemente de cómo esté hecho el arrollamiento del secundario, si la corriente  $I_1(t)$  aumenta, la corriente en el secundario  $I_2(t)$  debería ser tal que se oponga a ese aumento de flujo.

Está claro que si se cerrara el secundario, circularía una corriente que induciría en el primario otra *fem inducida* y así sucesivamente. Parece el cuento de nunca acabar. Pero no es así. Podremos aplicar las ecuaciones circuitales (que están acopladas) y que tienen en cuenta todos los procesos al mismo tiempo

$$V(t) - I_1(t)R_1 + \varepsilon_1 = V(t) - I_1(t)R_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_1 \frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$-I_2(t)R_2 + \varepsilon_2 = -I_2(t)R_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_2 \frac{dI_1}{dt} = 0$$

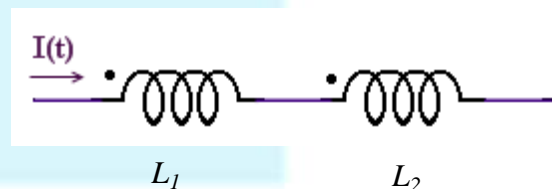
Pero, como ya dijimos, este sistema no lo trataremos analíticamente en esta materia.

### 9.18. Los bornes homólogos

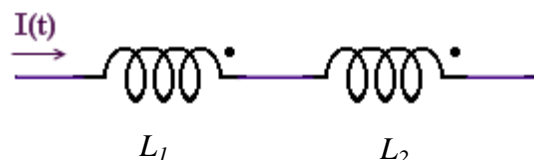
Hasta acá hemos visto cómo aplicar la Ley de Faraday-Lenz-Maxwell para entender “qué está pasando”. Ahora vamos a ver cómo podemos sistematizar esta ley básica del Electromagnetismo para poder aplicarla a casos de interés tecnológico. Cuando se tienen circuitos con inductancias no podremos darnos cuenta cuál es el sentido del arrollamiento de las inductancias. Sería bastante tedioso. Se usa entonces una convención: las inductancias se marcan con puntos definidos como **bornes homólogos**.

*Los bornes homólogos son aquellos por los cuales corrientes simultáneamente entrantes (o salientes) producen flujos magnéticos aditivos en el interior de cada bobina. Si ocurre lo contrario los flujos resultan sustractivos. Los bornes homólogos se indican con un punto.*

Por ejemplo, si se tienen dos bobinas puestas una a continuación de la otra y se disponen como indica la figura,



Por la convención, la corriente “entra” por los ambos bornes homólogos. Eso significa que el campo



generado por  $I(t)$  en la primera bobina tiene el mismo sentido que el generado en la segunda bobina (no dice qué sentido tiene el campo). Entonces, en ambas bobinas el campo será “la suma” de los dos campos (pensando que todas las líneas están confinadas al interior de las bobinas.. Sí... es una aproximación!).

Si la corriente saliera por los bornes homólogos, el efecto sería el mismo. En ese caso el dibujo sería el de la derecha.

En ambos casos, el flujo total sobre la bobina  $L_1$  se puede escribir como

$$\Phi_{T_1} = \iint_{S_1} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

Y ambos flujos serán del mismo signo. Entonces, como la corriente por ambas bobinas es la misma, podemos escribir que la *fem inducida* en la bobina  $L_1$

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} - M_{12} \frac{dI}{dt} = -(L_1 + M_{12}) \frac{dI}{dt}$$

Análogamente, y por la igualdad entre  $M_{12}$  y  $M_{21}$ , la *fem inducida* en  $L_2$  es

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} - M_{21} \frac{dI}{dt} = -(L_2 + M_{12}) \frac{dI}{dt}$$

Si las bobinas se hubieran dispuesto con los bornes homólogos en forma diferente (como se indica en las figuras)



Los flujos se hubieran restado, por lo que

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} + M_{12} \frac{dI}{dt} = -(L_1 - M_{12}) \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} + M_{21} \frac{dI}{dt} = -(L_2 - M_{12}) \frac{dI}{dt}$$

Estas no son las únicas disposiciones posibles para las bobinas. Vamos a combinar bobinas y resistencias y determinaremos cuáles son las caídas de tensión.

### 9.19. Combinando Inductancias

Cuando hay inductancias en el mismo o distintos circuitos, dependiendo de la geometría de ellos y de las características de las inductancias, el campo magnético generado en alguna de ellas puede o no interactuar con las otras. Es por eso que debemos tener en claro si los circuitos **son independientes o están acoplados**

- Circuitos magnéticamente independientes: cuando los dos circuitos se encuentran lo suficientemente distantes, de modo que el campo magnético de uno es despreciable en las proximidades del otro, entonces no se considera el factor de inductancia mutua y el único efecto importante para cada circuito será el de su fem autoinducida.
- Circuitos magnéticamente acoplados: cuando los dos circuitos se hallan muy próximos de modo que cada uno de ellos encierra una parte significativa del flujo generado por el otro, los coeficientes de inducción mutua son comparables en magnitud con los de autoinducción.

Vamos a considerar distintas combinaciones de inductancias

### 1. Dos inductancias “en serie”

Vamos a considerar las dos posibilidades de bornes homólogos (marcados con puntos verdes). Como sabemos, los portadores positivos se mueven hacia zonas de “menor potencial”. En ambos casos  $V_A > V_E$ .

$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}$ $\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} - M \frac{dI}{dt}$ $(V_A - V_E) + \varepsilon_1 - IR_1 + \varepsilon_2 - IR_2 = 0$ $V_A - V_E = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} + 2M \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $V_A - V_E = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $V_A - V_E = L_{equivalente} \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$	$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$ $\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt}$ $(V_A - V_E) + \varepsilon_1 - IR_1 + \varepsilon_2 - IR_2 = 0$ $V_A - V_E = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} - 2M \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $V_A - V_E = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $V_A - V_E = L_{equivalente} \frac{dI}{dt} + I(R_1 + R_2)$ $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$

Dependiendo de las características del circuito, las bobinas pueden concatenar todo, algo o nada del flujo generado por el campo magnético de la otra. Si concatena todo el flujo, será  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ; si concatena parte de él será  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$  (con  $k < 1$ ) y si no concatena nada, será  $M = 0$ .

2. Dos inductancias no conectadas por cables

$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$ $\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$ $(V_A - V_C) + \varepsilon_1 - I_1 R_1 = 0$ $(V_D - V_F) + \varepsilon_2 - I_2 R_2 = 0$ $V_A - V_C = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1$ $V_D - V_F = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} + I_2 R_2$	$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$ $\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$ $(V_A - V_C) + \varepsilon_1 - I_1 R_1 = 0$ $(V_D - V_F) + \varepsilon_2 - I_2 R_2 = 0$ $V_A - V_C = L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1$ $V_D - V_F = L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} + I_2 R_2$

Como 
$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \mp M \frac{dI_2}{dt} \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \mp M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\varepsilon_1 \pm M \frac{dI_2}{dt}}{L_1} \rightarrow$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \mp M \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \mp M \frac{\varepsilon_1 \pm M \frac{dI_2}{dt}}{L_1} = \mp \frac{M}{L_1} \varepsilon_1 - \left( L_2 + \frac{M^2}{L_1} \right) \frac{dI_2}{dt}$$

Si el acoplamiento es perfecto, como  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ , resulta que  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

3. Dos inductancias “en paralelo” con resistencias despreciables

$V_A - V_C = V_D - V_F \equiv V$ $V_A - V_C = L_1 \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1 + M \frac{dI_2}{dt}$ $V_D - V_F = L_2 \frac{dI_2}{dt} + I_2 R_2 + M \frac{dI_1}{dt}$ <p>Si <math>R_1 = R_2 = 0</math></p> $V \equiv L_{equivalente} \frac{dI}{dt} = L_{eq} \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}$ $L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} =$ $\equiv L_{eq} \frac{dI}{dt} = L_{eq} \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}$	$V_A - V_C = V_D - V_F$ $V_A - V_C = L_1 \frac{dI_1}{dt} + I_1 R_1 - M \frac{dI_2}{dt}$ $V_D - V_F = L_2 \frac{dI_2}{dt} + I_2 R_2 - M \frac{dI_1}{dt}$ <p><math>R_1 = R_2 = 0</math></p> $V \equiv L_{equivalente} \frac{dI}{dt} = L_{eq} \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}$ $L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} =$ $\equiv L_{eq} \frac{dI}{dt} = L_{eq} \frac{d(I_1 + I_2)}{dt}$

$$(L_1 \mp M) \frac{dI_1}{dt} = (L_2 \mp M) \frac{dI_2}{dt} \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} = \frac{(L_2 \mp M)}{(L_1 \mp M)} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dI_2}{dt} = \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \frac{dI_1}{dt}$$



$$L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt} \Rightarrow L_1 \frac{(L_2 \mp M)}{(L_1 \mp M)} \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( L_1 \frac{(L_2 \mp M)}{(L_1 \mp M)} \pm M \right) \frac{dI_2}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt}$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( L_2 \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \pm M \right) \frac{dI_1}{dt} = L_{eq} \frac{dI}{dt}$$

Entonces

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{L_{eq}}{\left( L_1 \frac{(L_2 \mp M)}{(L_1 \mp M)} \pm M \right)} \frac{dI}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dI_1}{dt} = \frac{L_{eq}}{\left( L_2 \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \pm M \right)} \frac{dI}{dt}$$

Sumando miembro a miembro

$$\frac{L_{eq}}{\left( L_2 \frac{(L_1 \mp M)}{(L_2 \mp M)} \pm M \right)} + \frac{L_{eq}}{\left( L_1 \frac{(L_2 \mp M)}{(L_1 \mp M)} \pm M \right)} = 1$$

$$\frac{(L_2 \mp M)}{(L_2(L_1 \mp M) \pm M(L_2 \mp M))} + \frac{(L_1 \mp M)}{(L_1(L_2 \mp M) \pm M(L_1 \mp M))} = \frac{1}{L_{eq}}$$

$$\frac{(L_2 \mp M)}{(L_2 L_1 - M^2)} + \frac{(L_1 \mp M)}{(L_1 L_2 - M^2)} = \frac{(L_1 \mp M) + (L_2 \mp M)}{(L_1 L_2 - M^2)} = \frac{(L_1 + L_2 \mp 2M)}{(L_1 L_2 - M^2)} = \frac{1}{L_{eq}}$$

Por lo tanto

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}$$

Observar que si las inductancias están desacopladas, se obtiene una expresión semejante a la de resistencias en paralelo.

<sup>i</sup> Feynman, Richard "Lectures on Physics" Vol. 2

<sup>ii</sup> <http://www.pagina12.com.ar/diario/suplementos/futuro/13-648-2003-12-07.html>

<sup>iii</sup> <http://www.teslasociety.com/biography.htm>

<sup>iv</sup> <http://theoatmeal.com/comics/tesla>

<sup>v</sup> <http://innovem.cat/fisica-relativista-experimento-0-el-disco-de-arago/>

<sup>vi</sup> Jackson, John "Classical Electrodynamics" Willey & Sons (1999)

<sup>vii</sup> Fernández, Juan C. "Ingeniería Electromagnética I Modelos estáticos y circuitales" EUDEBA (2013) pag. 382

<sup>viii</sup> Santaló, Luis "Vectores y Tensores" EUDEBA (1968).

<sup>ix</sup> R.H. Romer, What do "voltmeters" measure?: Faraday's law in a multiply connected region, Am. J. Phys, **50**, 1089-1093 (1982)